

Simulation des Bruchverhaltens quasi-spröder Werkstoffe bei einachsiger Zugbelastung unter Verwendung eines lokalen statistischen Ansatzes und einfacher statistischer Modelle

Von der Technischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
als Dissertation angenommene Arbeit

**Simulation des Bruchverhaltens quasi-spröder
Werkstoffe bei einachsiger Zugbelastung unter
Verwendung eines lokalen statistischen Ansatzes
und einfacher statistischer Modelle**

Von der Technischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
als Dissertation angenommene Arbeit

Autor:

J. Schicker

(Institut für Werkstofforschung)

Die Berichte der GKSS werden kostenlos abgegeben.
The delivery of the GKSS reports is free of charge.

Anforderungen/Requests:

GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH
Bibliothek/Library
Postfach 11 60
D-21494 Geesthacht
Germany
Fax.: (49) 04152/871717

Als Manuskript vervielfältigt.
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

ISSN 0344-9629

GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH · Telefon (04152)87-0
Max-Planck-Straße 1 · D-21502 Geesthacht / Postfach 11 60 · D-21494 Geesthacht

Simulation des Bruchverhaltens quasi-spröder Werkstoffe bei einachsiger Zugbelastung unter Verwendung eines lokalen statistischen Ansatzes und einfacher statistischer Modelle

(Von der Technischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel als Dissertation angenommene Arbeit)

Johannes Schicker

197 pages with 101 figures and 23 tables

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das kollektive Versagensverhalten quasi-spröde brechender Werkstoffe unter statistischen Gesichtspunkten modellhaft untersucht. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß auf der Skala von Korngrößen mikrostrukturell bedingte lokale Festigkeiten statistisch verteilt sind. Bei Zugbelastung brechen zuerst schwache Gefügebestandteile. Dies führt zu diffus verteilten Mikrorissen und lokalen Spannungskonzentrationen, durch welche angrenzende Gefügebestandteile ebenfalls brechen können. Zuletzt bricht der Querschnitt kaskadenartig durch, ohne daß dafür die äußere Last weiter erhöht zu werden braucht. Für die Bestimmung der makroskopischen Probenantworten wird einem Modellansatz auf der Grundlage des in der Literatur vielfach verwendeten Bündelkettenmodells ein zweiter Ansatz auf Grundlage einer Finite-Elemente-Modellierung gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß sich mit dem Bündelkettenmodell in seinen traditionellen Modellformen weder das individuelle noch das statistische Probenverhalten hinreichend gut wiedergeben läßt. Durch die grundsätzliche Berücksichtigung eines mehrachsigen Spannungszustands bei der Umverteilung von freiwerdenden Lasten gebrochener Gefügebestandteile ergeben sich im FE-Modell realitätsnähere Verhaltensweisen für einzelne Proben, wodurch auch das statistische Verhalten dieser Modellproben einem Vergleich mit Experimenten besser gerecht wird. Überraschenderweise läßt sich der Probengrößeneffekt im FE-Modell oberhalb einer von der Heterogenität des Materials abhängigen Probengröße mit Hilfe einer weakest-link-Skalierung bezüglich der Gesamtzahl der Elemente abschätzen.

Simulation of the rupture behaviour of quasi-brittle materials under uniaxial tensile loading using a local statistical approach and simple statistical models

Abstract

In this work the statistical failure behaviour of quasi-brittle materials has been investigated using models. In this context, it is assumed that the local rupture strengths are statistically distributed as a function of the microstructure with regard to grain size. Under tensile loading the weakest texture components are the first to rupture. This leads to a network of diffusely distributed micro-cracks and local stress concentrations, these can lead to further rupture of the adjacent microstructure. This

process cascades and leads to a final rupture of the specimen without any further increase of the external load. An approach based on the well-known “chain of bundles” model has been used to determine the macroscopic responses of specimens. This methodology has been compared with a second approach based on a finite element model. It has been demonstrated that the “chain of bundles” model, in its traditional forms, was not able to either reproduce the behaviour of individual specimens or the statistical behaviour of samples. The finite element model can better predict both the individual and statistical behaviour because it considers the multi-axial stress state during the redistribution of released loads that result from broken texture components. Surprisingly, the specimen size effect may be estimated with the finite element model using a weakest link scaling that depends on the total number of elements. For the weakest link scaling to be successful more than a critical number of elements are required and this number is determined by the heterogeneity of the material.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xiii
1 Einführung	1
1.1 Modellierung quasi-spröder Werkstoffe	2
1.2 Ziel und Inhalt dieser Arbeit	6
1.2.1 Aufbau und Gliederung	9
2 Experimentelle Grundlagen	11
2.1 Beobachtungen an γ -TiAl-Mikroflachzugproben	11
2.1.1 Werkstoff	11
2.1.2 Durchgeführte Versuche	12
2.1.3 Schädigungsverhalten und Probenbruch	13
2.1.4 Mikrorißverteilungen	13
2.1.5 Makroskopische Bruchspannungen	14
2.2 Experimentelle Untersuchungen an anderen Titanaluminiden	15
2.2.1 TAB	15
2.2.2 TSA	16
2.2.3 TSA-Blech	17
2.2.4 Interpretationen	18
2.3 Beobachtungen zum Versagen anderer heterogener spröder Werkstoffe	19
3 Statistische Verteilungen	23
3.1 Analytische Verteilungsfunktionen	23
3.1.1 Gleichverteilung	23
3.1.2 Normalverteilung	24
3.1.3 Weibull-Verteilung	25
3.2 Darstellung diskreter stochastischer Ereignisse	27
3.3 Gleichverteilte Zufallszahlen	28

3.3.1	Erzeugung von Zufallszahlen	28
3.3.2	Reproduzierbarkeit	29
3.3.3	Generierung der Samenwerte	30
3.4	Grundverteilungen	30
3.4.1	Erzeugung zufälliger Stichprobenwerte	31
4	Statistische Versagensmodelle	33
4.1	Fasermodelle	33
4.1.1	Klassisches Bündel	33
4.1.2	Einfache Kette	36
4.1.3	Bündelkette	38
4.2	Finite-Elemente-Modelle	47
4.2.1	Diskretisierung	48
4.2.2	Ablauf der FE-Berechnung	51
4.2.3	FE-Formalismus	52
4.2.4	Versagen durch Kohäsivelemente	58
4.2.5	Versagen von Flächenelementen	63
4.2.6	Gleichungslöser	63
4.2.7	Steuerung des FE-Programms	67
4.2.8	Überschreiten der Belastbarkeitsgrenzen	70
4.2.9	Diskussion der Schädigungsmodellierung	72
4.2.10	Visualisierung von Daten	73
5	Zusammenfassung von Ergebnissen der Fasermodelle	75
5.1	Bündeltheorie und kleine Bündel bei ELS	75
5.1.1	Bruchspannungen	76
5.1.2	Faserspannungen und Schädigung	79
5.2	Bündelketten endlicher Breite bei ELS	81
5.2.1	Bruchspannungen	81
5.2.2	Faserspannungen und Schädigung	83
5.3	Skalenverhalten von Bündelketten bei ELS und LLS	83
5.3.1	Abhängigkeit von der Kettenlänge	83
5.3.2	Abhängigkeit von der Gesamtprobengröße	85

6	Ergebnisse von FE-Rechnungen	89
6.1	Überblick zu den Rechnungen mit den FE-Modellen	89
6.1.1	FE-Modellproben und ihre Belastung	90
6.1.2	Verwendete Grundverteilungen	92
6.1.3	Bestimmung der Versagens- und Schädigungswahrscheinlichkeiten . . .	92
6.1.4	Rechenaufwand	93
6.2	Rechnungen für Flachzugproben konstanten Querschnitts	94
6.2.1	Rechnungen mit dem Kohäsivmodell	94
6.2.2	Rechnungen mit versagenden Kontinuumelementen	97
6.2.3	Vergleich der Versagensmodelle	102
6.3	Rechnungen für taillierte Flachzugproben	105
6.3.1	Diskretisierung der taillierten Probenfläche	105
6.3.2	Untersuchte Probenserien	106
6.3.3	Schädigungsentwicklung und Versagen	107
6.3.4	Bruchlasten und makroskopische Bruchspannungen	108
6.3.5	Schädigung	110
6.3.6	Ergänzende Untersuchung zum Rißabstand	114
6.3.7	Interpretation der Ergebnisse und Folgerungen	114
6.4	Zusammenfassung und Bewertung der FE-Modelle	117
7	Vergleich zwischen Bündel- und FE-Modell	119
7.1	Verhalten der Modellproben bei Belastung	119
7.2	Probengrößeneffekte	120
7.2.1	Skalierbarkeiten	122
7.3	Anpassung des Lastkonzentrationsfaktors des Bündelkettenmodells	122
7.3.1	Anpassung für individuelle Proben	123
7.3.2	Anpassung für kollektive Probenantworten	123
8	Vergleich von FE-Modell und Experimenten	125
8.1	Bruchspannungen	125
8.2	Schädigungen	126
9	Bewertung und Ausblick	129
10	Farbige Abbildungen	135
	Literaturverzeichnis	179
	Danksagung	185

Abbildungsverzeichnis

2.1	taillierte Mikroflachzugprobe	12
2.2	Mikroflachzugprobe mit konstantem Querschnitt	12
2.3	Mikrostruktur γ -TiAl	12
2.4	Mikroriß in γ -TiAl	12
2.5	Mikrostruktur TAB	16
2.6	Lüdersband	16
2.7	Mikrostruktur TSA	17
2.8	Bruchfläche von TSA mit Pore	17
2.9	Mikrostruktur TSA-Blech	18
2.10	TSA-Blech mit Mikrorissen	18
3.1	Vergleich WEIBULL-Funktion und Approximation	32
4.1	klassisches Bündel	33
4.2	einfache Kette	37
4.3	weakest-link-Effekt	37
4.4	Bündelkette	39
4.5	<i>local load sharing</i> : Idealisierung	45
4.6	FE-Testsystem	58
4.7	Kohäsivgesetz	59
5.1	Faserspannung, Schädigung und Bündelspannung	80
5.2	Größeneffekt von Bündelketten bei ELS und LLS	87
6.1	FE-Diskretisierung der taillierten Proben	107
	Farbige Abbildungen:	135
	<i>zu Kapitel 2:</i>	
10.1	gemessene Rißdichten	136
10.2	Ausgleichskurve durch die gemessenen Rißdichtenwerte	136

10.3	Kraft-Verlängerungskurven für γ -TiAl	137
10.4	Kraft-Verlängerungskurve für TAB	137
10.5	Kraft-Verlängerungskurve für TSA	137
10.6	Kraft-Verlängerungskurve für TSA-Blech	137
<i>zu Kapitel 3:</i>		
10.7	Zweiparametrische WEIBULL-Funktion für $p > 1$	138
10.8	Zweiparametrische WEIBULL-Funktion für $p \leq 1$	138
<i>zu Kapitel 4:</i>		
10.9	herausgebrochene Ecke	139
10.10	Auswirkung unterschiedlicher Übertragung von Kohäsivfestigkeiten	140
10.11	Häufigkeiten der Grenzwerte der Proben aus Abbildung 10.10	140
10.12	Schrittsteuerung FE-Modell	141
10.13	Kraft, Verschiebung und Schädigung	141
10.14	Rißausbreitung bei langsamer Reduktion des Separationsgesetzes	142
10.15	Last-Verlängerungskurven für Abbildungen 10.14 und 10.16	142
10.16	Rißausbreitung bei schneller Reduktion des Separationsgesetzes	143
<i>zu Kapitel 5:</i>		
10.17	Bündelspannungsverlauf über Faserspannungen	144
10.18	einfache Bündel: σ_B vs. σ_f^t für verschiedene Bündelgrößen	144
10.19	kumulative Verteilungsfunktionen der Bündelbruchspannungen	145
10.20	kumulative Bruchspannungsverteilung eines einfasrigen Bündels	145
10.21	Bündelspannung als 3D-Funktion	146
10.22	einfache Bündel: Probability und Höhenlinien gleicher Bündelspannung	146
10.23	einfache Bündel: Faserspannung und Schädigung	147
10.24	Schädigung vs. Faserspannung bei Bündelbruch für verschiedene Bündelgrößen	147
10.25	einfache Bündel: Faserspannungsverteilung für verschiedene Bündelgrößen	148
10.26	einfache Bündel: Schädigungsverteilung für verschiedene Bündelgrößen	148
10.27	Bündelketten: Bruchspannungsverteilung $\Lambda(\sigma_C)$	149
10.28	Bündelbruchspannungsverteilung bei ELS und LLS	150
10.29	Bündelschädigungsverteilung bei ELS und LLS	150
10.30	skalierte Bündelkettenbruchspannungsverteilung bei ELS und LLS	151
10.31	skalierte Bündelkettenschädigung bei ELS aus Bündel	152
10.32	skalierte Bündelkettenschädigung bei LLS aus Bündel	152
10.33	skalierte Bündelkettenschädigung bei ELS aus kurzer Kette	153
10.34	skalierte Bündelkettenschädigung bei LLS aus kurzer Kette	153
10.35	Bruchspannungsverteilung bei LLS	154

10.36	Schädigungsverteilung bei LLS	154
10.37	Größeneffekt der Spannungen von BK-Miniaturproben	155
10.38	Größeneffekt der Schädigungen von BK-Miniaturproben	155
<i>zu Kapitel 6:</i>		
10.39	2 Kohäsivproben mit gleichem Γ : σ u. Schädigung vs. Probendehnung . . .	156
10.40	2 Kohäsivproben mit gleichem Γ : Spannung vs. Schädigung	156
10.41	Bruchspannungen von 50 Kohäsivproben bei verschiedenen ψ	157
10.42	Bruchschädigungen von 50 Kohäsivproben bei verschiedenen ψ	157
10.43	Bruchspannungsverteilung von Kohäsivproben bei unterschiedlichem ψ . . .	158
10.44	Bruchschädigungsverteilung von Kohäsivproben bei unterschiedlichem ψ . .	158
10.45	Kontinuumsmodell: $P(\sigma)$ bei $\zeta=5, 20, 2$ Probengrößen	159
10.46	Kontinuumsmodell: $P(b)$ bei $\zeta=5, 20, 2$ Probengrößen	159
10.47	Kontinuumsmodell: w-l-Skalierung $1-P(\sigma)$ von Abbildung 10.45	160
10.48	Kontinuumsmodell: w-l-Skalierung $1-P(b)$ von Abbildung 10.46	160
10.49	Häufigkeitsverteilungen $P(\sigma)$ bei Kohäsiv- und Kontinuumsmodell, $\zeta=20$. .	161
10.50	Häufigkeitsverteilungen $P(b)$ bei Kohäsiv- und Kontinuumsmodell, $\zeta=20$. .	161
10.51	Spannung vs. Kontinuumsverlängerung von 4 Modellrechnungen	162
10.52	Spannung vs. Schädigung von 4 Modellrechnungen	162
10.53	3 Modellproben bei F_{\max}	163
10.54	Häufigkeitsverteilungen $P(\sigma)$ bei Kohäsiv- und Kontinuumsmodell, $\zeta=2$. .	164
10.55	Häufigkeitsverteilungen $P(b)$ bei Kohäsiv- und Kontinuumsmodell, $\zeta=2$. . .	164
10.56	Bruchspannungsverteilungen aller taillierten Proben	165
10.57	<i>weakest-link</i> -Skalierung der Spannungen vergleichbarer taillierter Proben . .	165
10.58	<i>weakest-link</i> -Skalierung der Bruchspannungen bei unterschiedlichem κ . . .	166
10.59	Flächenanteil und Elementanteil geschädigter Bereiche	166
10.60	Schädigungsverteilung aller taillierten Proben	167
10.61	Schädigungsverteilung bei $\kappa=1.5$	167
10.62	<i>weakest-link</i> -Skalierung der Schädigungen vergleichbarer taillierter Proben .	168
10.63	<i>weakest-link</i> -Skalierung der Bruchschädigungen bei unterschiedlichem ζ . . .	168
10.64	mittlerer Schädigungsabstand einiger Modellproben	169
10.65	maximaler Schädigungsabstand einiger Modellproben	169
10.66	Bruch des kerbfernsten Elements der Proben S20v1	170
10.67	Kraftmaximum und makroskopischer Bruch	170
10.68	Bruchspannungsverteilungen taillierter und nichttaillierter Proben	172
10.69	Schädigungsverteilungen taillierter und nichttaillierter Proben	172
<i>zu Kapitel 7:</i>		
10.70	Last-Schädigungskurven verschiedener Modelle	173

10.71	Größeneffekt der Spannungen von Bündelketten- und FE-Modell	174
10.72	Größeneffekt der Schädigungen von Bündelketten- und FE-Modell	174
10.73	$P(\sigma)$ bei unterschiedlichen Modellen	175
10.74	$P(b)$ bei unterschiedlichen Modellen	175
10.75	$P(\sigma)$ bei FE und BK bei 2 Verteilungen	176
10.76	$P(b)$ bei FE und BK bei 2 Verteilungen	176
<i>zu Kapitel 8:</i>		
10.77	Vergleich der Bruchspannungsverteilung von FE-Modell und Experiment . .	177
10.78	Skalierung des Abstandes des Schwerpunkts der Rißdichte	177
10.79	mittlerer Rißschwerpunktstand von der Bruchkante	178
10.80	Mikrorißanteil vs. Abstand zur Bruchkante	178

Tabellenverzeichnis

2.1	An taillierten Mikroflachzugproben gemessene Rissdichten	14
2.2	Abmessungen und Bruchlasten taillierter Mikroflachzugproben	14
2.3	4 TiAl-Werkstoffe, Eigenschaften und Ergebnisse der Zugversuche	19
4.1	Modellketten	38
4.2	Vergleich zwischen einfachem Bündel und Bündelkette (ELS)	43
4.3	Faserlasten bei verschiedenen Lastverteilungsvorschriften	46
5.1	Bündeltheorie und Modellbündel	77
5.2	Superbündel mit 1 Million Fasern	78
5.3	Modellbündelketten	82
5.4	Bündelketten mit ELS und LLS	84
5.5	Größeneffekt von Bündelketten	86
6.1	Ergebnisse von Kohäsivproben mit $\zeta=2$	97
6.2	Ergebnisse untaillierter Modellproben mit Kontinuumselementen	99
6.3	Vergleich Bruchspannungen und -schädigungen bei variiertes Grundverteilung	101
6.4	4 FE-Modellrechnungen konstanten Querschnitts bei F_{\max}	103
6.5	taillierte Modellproben, Probenbezeichnungen	108
6.6	schmale taillierte Proben ($\kappa=2$), makroskopische Bruchspannungen	108
6.7	breite taillierte Proben ($\kappa=1.5$), makroskopische Bruchspannungen	109
6.8	schmale taillierte Proben ($\kappa=2$), Bruchschädigung	111
6.9	breite taillierte Proben ($\kappa=1.5$), Bruchschädigung	111
6.10	mittlere Mikrorißausbreitung der Modellproben	113
6.11	maximale Mikrorißausbreitung der Modellproben	114
7.1	Vergleich der Ergebnisse bei 2 Verteilungsbreiten mit FE und Bündelkette . .	124

Kapitel 1

Einführung

Jeder Festkörper bricht, wenn die aufgebrachte Last groß genug ist. Vor dem Bruch erfährt der Körper eine Deformation. Ist diese Deformation klein genug, verschwindet sie wieder, wenn der Körper entlastet wird; eine solche Deformation ist „elastisch“. Bei Steigerung der Last, kann der Körper aus seinem elastischen Verhalten heraus entweder abrupt auseinanderbrechen oder sich so stark verformen, daß diese Verformung auch nach einer erneuten Entlastung nicht vollständig verschwindet. Eine solche Verformung wird „plastisch“ genannt. Plastische Verformung bedeutet i. a. wesentlich größere, deutlich sichtbare Verschiebungen der einzelnen Materiepunkte. Das Verhalten eines Körpers, das sich durch starke plastische Verformung vor dem Bruch auszeichnet, heißt „duktil“, während das Verhalten, bei dem ein Körper direkt aus dem elastischen Zustand heraus bricht, also nach nur geringer Deformation, „spröde“ genannt wird. Da der Sprödebruch plötzlich ohne warnende Vorzeichen erfolgt, wird er mehr gefürchtet. Ob sich ein Material spröde oder duktil verhält, hängt nicht allein von der Zusammensetzung des Materials ab. Bei unterschiedlichen Temperaturen kann ein Material sich einmal spröde und einmal duktil verhalten. Genauso können Umgebungseinflüsse (z. B. Korrosion) oder die Belastungsgeschwindigkeit das Materialverhalten entscheidend beeinflussen.

Auf atomarer Ebene besteht ein kristallines Material aus Elementgittern, bei denen die das Material zusammensetzenden Atome bestimmte regelmäßig angeordnete Positionen besitzen. Elastische Dehnung findet durch Dehnung dieses Atomgitters statt. Auf einer größeren Skala, der sogenannten „Mikroskala“, setzt sich das Material aus Körnern zusammen, die sich durch eine mehr oder weniger einheitliche Ausrichtung der zugrundeliegenden Atomgitter auszeichnen. Die Ausrichtung der Körner gegeneinander unterliegt dabei einer statistischen Verteilung, der Textur. Zwischen den Körnern können außerdem Poren, also Hohlräume, und/oder Einschlüsse anderer Zusammensetzung auftreten. Die Körner selbst sind zwar weitgehend regelmäßig aufgebaut, besitzen aber normalerweise Fehler in der Gitterstruktur, wie etwa Versetzungen und Zwillinge. Unter der Wirkung einer äußeren Last können solche Gitterfehler durch den Kristall wandern, wodurch einzelne Bereiche im Kristall gegeneinander abgleiten. Geschieht dieses Abgleiten schon bei geringen Kräften und über große Entfernungen, verformt sich das Material auch makroskopisch stark. Dabei schnürt sich etwa eine Zugprobe makroskopisch sichtbar ein, es bilden sich Hohlräume, die sich schließlich vereinigen und so zum duktilen Versagen des Materials führen. Werden die Gitter jedoch am Abgleiten gehindert, z. B. durch Einschlüsse, Poren oder an Korngrenzen, bilden sich an diesen Stellen vorzugsweise Mikrorisse, ohne daß sich das Material makroskopisch sichtbar verformen kann. Mikrorisse stellen ebenso wie Poren Schwachstellen im Gefüge dar, so daß von ihnen der makroskopische Bruch ausgehen kann, indem bei weiterer Belastung das Material zwischen diesen Mikrorissen plötzlich versagt. Das Material verhält sich dann, abgesehen von mikroskopisch kleinen

Bereichen, makroskopisch spröde.

Wegen der Fähigkeit duktiler Werkstoffe, die Auswirkungen lokaler Ereignisse, wie etwa Spannungskonzentrationen infolge Mikrorißbildung, durch weitreichende Versetzungsbewegungen in benachbarte Bereiche des Gefüges zu übertragen und somit lokale Unterschiede auszugleichen, lassen sich diese Werkstoffe mit guter Berechtigung homogenisieren und damit kontinuumsmechanisch bereits mesoskalig als näherungsweise homogenes Medium behandeln.

Sind die Möglichkeiten des Materials, lokale Ereignisse „weiterzureichen“, begrenzt, ist die Voraussetzung für eine Homogenisierung nicht gegeben. Besonders bei Materialien, deren Gefügestruktur, abgesehen von diffus verteilten, voneinander unabhängigen Schwachstellen, im wesentlichen homogen ist, kann dabei bereits ein lokales Versagen an einer besonders schwachen Stelle des Gefüges als Auslöser für einen plötzlichen makroskopischen Bruch ausreichen. Bei solchen „ideal spröden“ Materialien treten statistische Effekte in den Vordergrund, die zu deutlicher Streuung der makroskopischen Bruchspannungen führen. Probengrößeneffekte, die aus der Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit, lokale Schwachstellen im Material anzutreffen, von der Probengröße resultieren, sind hierfür theoretisch herleitbar [80]. Zur rechnerischen Abschätzung des Spröbruchrisikos solcher Materialien eignet sich der Ansatz, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten lokaler Schädigung in einem Volumenbereich kritischer Größe zu bestimmen und als makroskopisches Versagenskriterium zu definieren. Insbesondere für ferritische Stähle im Niedrigtemperaturbereich wird dieses ingenieurmäßige Verfahren [12] empfohlen [69].

Viele, besonders mehrphasige, Werkstoffe weisen ein Verhalten auf, das makroskopisch weder ideal spröde noch ausgeprägt duktil ist. Hierbei treten lokale Schädigungen in Form von einzelnen, zumeist weit verstreuten Mikrorissen auf, mitunter begleitet durch lokale plastische Verformungen, ohne daß sofort katastrophales Materialversagen eintritt. Erst bei Erreichen einer kritischen Schädigung versagt eine Probe dann meist recht plötzlich infolge von Lokalisierung der Schädigung, d. h. einer lokalen Konzentration von Mikrorißentstehung und deren Vereinigung, durch Bruch des Restquerschnitts. Die Ursache für dieses Verhalten liegt in einer Mikrostruktur mit ausgeprägter ungeordneter Gefügeheterogenität. Infolge der diffus verteilten Mikrorißbildung besitzt ein solches Material Bereiche deutlicher Schädigung auch außerhalb des makroskopischen Risses, wobei die Form und Größe des geschädigten Bereichs von der Probenform und ihrer Belastung abhängt. Wie schon bei den ideal spröden Werkstoffen wird auch hier eine Probengrößenabhängigkeit von Mittelwert und Streuung von nomineller Bruchspannung¹ und Bruchschädigung (Größeneffekt) beobachtet. Allerdings läßt sich diese im Gegensatz zum Probengrößeneffekt ideal spröder Werkstoffe nicht allein durch die von Weibull [80] eingeführte Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins von lokalen Schwachstellen erklären [10], sondern sie ist wesentlich komplizierterer Natur. Zur Modellierung des Schädigungs- und Bruchverhaltens solcher Werkstoffe gibt es verschiedene Ansätze, die im folgenden genauer beschrieben und klassifiziert werden.

1.1 Modellierung quasi-spröder Werkstoffe

Nach Delaplace, Pijaudier-Cabot und Roux, [24], lassen sich die Modellierungsansätze für quasi-sprödes Materialversagen in 2 Kategorien einteilen:

¹Mit „nomineller Bruchspannung“ wird die maximale Probenlast bezogen auf den Probenquerschnitt bezeichnet. Sie wird auch mit „makroskopischer Bruchspannung“ bezeichnet, zur Unterscheidung von den „lokalen Bruchspannungen“ der einzelnen Gefügebestandteile.

1. Modelle, die das Materialverhalten kontinuumsmechanisch unter Einbeziehung von deterministischen Schädigungsmodellen beschreiben, und
2. diskrete (lokale) Modelle, die die Heterogenität und damit die zufällige Verteilung der mechanischen Eigenschaften explizit in Betracht ziehen und das lokale Materialverhalten mit meist einfachen Modellen beschreiben.

Die kontinuumsmechanischen Modelle, Typ 1, stellen *mean field*-Näherungen dar und sind deterministisch. Die dabei verwendeten Ansätze zur Beschreibung der Schädigung, bei denen die mit der Mikrorißbildung einhergehende Schädigung von der Last abhängig ist, [52–54, 72], sind phänomenologisch mit dem in den letzten Jahren im Bereich duktiler Schädigung zunehmend angewendeten GURSON-Modell [35] vergleichbar, bei dem eine innere lastabhängige, irreversibel agierende Schädigungsvariable die Abnahme der Materialfestigkeit und damit verbundenes Versagen mit Mikrodefekten verknüpft. Konstitutiv ist die Schädigung hier aber nicht mit der Spannung sondern meist mit der Dehnung verknüpft. Die Schädigung des Materials wird dabei durch Homogenisierung über die Einheitszelle verschmiert und eine Korrelation zwischen einer Einheitszelle und einer mikrostrukturellen Gefügeeinheit ist nicht vorgesehen. (Ein Überblick über den aktuellen Stand schädigungsbasierter Kontinuumsmodellierung wird in [23] gegeben.) In jüngster Zeit wird die Materialschädigung anstelle mit einer inneren Schädigungsvariablen auch zunehmend mit Kohäsivzonen auf der Grundlage der Arbeiten von Dugdale, Barenblatt und Hillerborg [8, 26, 47] modelliert [23, 27, 78].

Die für die kontinuumsmechanische Modellierung benötigten repräsentativen Volumenelemente (RVE) setzen die Möglichkeit der Mittelung über die in Modellen des 2. Typs explizit berücksichtigten Fluktuationen voraus. Zufällig auftretende lokale Ereignisse, wie verstärkte Mikrorißkonzentrationen, können dabei keine Berücksichtigung finden. Konsequenterweise werden Modelle mit homogenisiertem Schädigungsverhalten deshalb hauptsächlich für makroskalige Modellierungen in gekerbten und/oder biegebelasteten Bauteilen (hauptsächlich aus Beton) angewandt, wo der Einfluß der Heterogenität gegenüber den durch Belastung und Geometrie bedingten lokalen Spannungsfeldern in den Hintergrund tritt. Ob die Annahme von Makroskaligkeit berechtigt ist, schwankt dabei von Material zu Material in Abhängigkeit vom Verhältnis der mikrostrukturellen Gefügeeinheiten zur Probengröße. Je kleiner die Gefügeeinheiten mit heterogenen Eigenschaften und je größer die Probenabmessungen sind, desto eher ist diese Annahme berechtigt. Wenn die ungeordnet verteilten, mikromechanisch heterogenen Strukturkomponenten, wie z. B. Körner oder Einschlüsse, im Verhältnis zur Probengröße nicht vernachlässigbar klein und/oder wenn die durch diese Heterogenitäten bewirkten lokalen Fluktuationen der mechanischen Eigenschaften groß sind und wenn die Spannungsfelder, die sich aus der Art der Belastung ergeben, keine eindeutige Rißlokalisierung erzwingen (z. B. bei einachsigen Zug in ungekerbten Proben) sind die Voraussetzungen zu einer Modellierung des Schädigungsverhaltens mit homogenisierten Schädigungsmodellen verletzt, so daß eine RVE-basierte Modellierung wenig sinnvoll ist.

Die mechanischen Eigenschaften der diskreten Modelle, Typ 2, reflektieren explizit die Mikrostruktur des Materials und zielen darauf ab, die makroskopischen Konsequenzen mikrostruktureller Unordnung während des Versagensprozesses zu verstehen und zu beschreiben. Hierbei ist die Variationsbreite der Modellierungsansätze sehr groß, wobei allen gemein ist, daß sie in der einen oder anderen Form Zufälligkeiten berücksichtigen und dadurch als stochastische²

²Es muß dabei angemerkt werden, daß viele der Modelle darauf ausgerichtet sind, eine zufällige Konstellation von Unordnung zu berücksichtigen, aber nur wenige Modelle diese auch im statistischen Sinn systematisch untersuchen. Ob die vorgefundene oder generierte Unordnung dabei statistische Relevanz besitzt, z. B. im Sinne einer mittleren oder extremalen Konstellation, wird oftmals nicht thematisiert.

Modelle angesehen werden können.

In den meisten dieser Modelle werden die lokalen Materialeigenschaften stochastisch generiert. Dies geschieht dabei entweder dadurch, daß sie unter Verwendung statistischer Verteilungen beschrieben werden, z. B. mittels einer WEIBULL-Verteilung. Dabei werden meist die Bruchfestigkeiten variiert [34, 38, 49, 58, 68], mitunter aber auch andere Parameter, wie beispielsweise der Elastizitätsmodul [15] oder die Anfangsporosität [72]. Die zweite Möglichkeit, die Materialeigenschaften stochastisch zu beschreiben, besteht darin, ein (reales oder zufällig generiertes) Gefüge, also die Größe, Verteilung und Form von Körnern oder Einschlüssen, über ein Raster auf das Modell abzubilden („Fenster-technik“). Dabei wird die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Gefügestrukturen innerhalb eines Rasterelements (Fenster) bestimmt und damit das Verhalten und/oder die Festigkeit des Gefüges an dieser Stelle festgelegt [3, 5, 9, 31, 67]. In [67] wird dazu beispielsweise ein Gitter auf das Gefüge von Beton projiziert und damit entschieden, ob die Gitterstäbe Matrix-, Zuschlagstoff- oder Übergangsmaterialeigenschaften besitzen. In [9] wird gezeigt, wie sich die Fenster-technik mittels *computer aided tomography* auf 3D-Mikrostrukturen ausweiten läßt. Die Fenster-technik wird oftmals beschränkt auf eine zufällige Realisierung des gewählten Fensters angewendet. Die effektive Kompositantwort bei einer Variation der Fenstergröße ist in [5] behandelt und in [48] werden Techniken gezeigt, wie zufällige Gefügestrukturen unterschiedlicher Morphologietypen, z. B. Partikel in einer Matrix, Polykristalle etc., erfaßt und mit statistischen Mitteln beschrieben werden können.

In einigen Arbeiten werden unregelmäßige Netze oder Gitterstrukturen erzeugt. Damit wird entweder die Form und Größe von Partikeln variiert [79], oder es sollen damit netzabhängige Vorzugsrichtungen, etwa bei der Rißausbreitung, vermieden werden [6, 13, 66, 77]. Zumeist werden unregelmäßige Gitter mit anderen stochastischen Modellierungstechniken, z. B. der Fenster-technik, verknüpft.

Darüberhinaus zeichnen sich viele stochastische Modellierungsansätze durch stark vereinfachte Materialgesetze aus, z. B. elastisch-perfekt-spröde. Oftmals werden zur weiteren Vereinfachung auch elektrische Analogien verwendet, wodurch die Anzahl der Freiheitsgrade gegenüber Spannungs-Verzerrungs-Modellen reduziert wird [50].

Zur Modellierung eines Probenkörpers werden vorzugsweise einfache Gittermodelle aus Stäben oder Balken, also Ketten, Fachwerk- oder Rahmenstrukturen verwendet [14, 43, 56, 66, 68, 74]. Einfache FE-Diskretisierungen³ sind eher selten [59], wohingegen mitunter Kontinuumsmodelle vom Typ 1 mit lokalen Modellen vom Typ 2 kombiniert werden, indem beispielsweise Materialparameter, Netze oder Randbedingungen stochastisch generiert werden [20, 22, 54, 72, 79].

Versucht man nun, etwas Ordnung in die diskreten lokalen Modelle (Typ 2) zu bringen, lassen sich diese entweder nach ihren physikalischen oder nach ihren stochastischen Eigenschaften klassifizieren. Delaplace et al. [24] unterscheiden nach ihren physikalischen Eigenschaften in

- 2.1 Gitter, deren Elemente durch eine vorgegebene Mikrostruktur bestimmt sind, und
- 2.2 Modelle, deren Gitter nicht mit einer konkreten Mikrostruktur korreliert sind.

Danach verwenden Modelle des Typs 2.1 Elemente, die Strukturbereiche repräsentieren. Aufgrund der Eigenschaft, die physikalische Struktur zu diskretisieren, besitzen diese Modelle inhärente Längenmaße. In diesen ist die Größe der Elemente oder die Länge der Stäbe oder

³Von Herrmann und Roux, [45], werden auch die FE-Modelle zu den Gittermodellen gezählt, da dabei das Kontinuum auf einen Satz von Punkten (eines Gitters) reduziert wird, für die die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden, was aber i. a. nicht auch Gleichgewicht im Kontinuum bedeutet [60].

Balken durch die Beziehung bestimmt, die sich aus der Abbildung der Materialeigenschaften auf das diskrete Modell ergibt.

Modelle vom Typ 2.2 verwenden wie die ersteren Gitter, Stäbe oder Balken, haben aber im Gegensatz zu diesen keine Korrelation zwischen Gittergröße und Mikrostruktur. Ihr Ziel besteht somit nicht in der Beschreibung der Antwort eines konkreten Modells auf eine äußere Belastung, sondern vielmehr in der Untersuchung des Einflusses lokaler Unordnung auf das kollektive Systemverhalten, also auf das Verhalten einer statistischen Gesamtheit nominell gleicher Proben [14, 15, 24]. Dabei wird üblicherweise eine große Anzahl von Freiheitsgraden verwendet.

Als besondere Klasse der Modelle vom Typ 2.2 stechen Fasermodelle hervor, die wegen ihrer Einfachheit und teilweise analytisch behandelbaren Form weit verbreitet und bezüglich vieler Aspekte untersucht sind. Die Anwendung beschränkt sich fast ausnahmslos auf eindimensionale Zuguntersuchungen. (In [18, 57] werden allerdings auch die flächenhafte Anordnung von Fasern untersucht.) Die Fasermodelle ihrerseits lassen sich unterteilen in:

- einfache Bündel mit gleichmäßiger Verteilung der Faserlasten [19, 42],
- Ketten einfacher Bündel [34, 58, 73] und
- Bündel und Bündelketten mit ungleichmäßiger Verteilung der Faserlasten [38, 39, 51].

Untersuchungen an mikrostrukturunabhängigen Modellen werden oft mit dem Ziel durchgeführt, das makroskopische Modellverhalten für den asymptotischen Fall unendlich vieler Fasern bzw. Elemente zu bestimmen [19, 73], da dieser Grenzfall durch ein kontinuierliches schädigungsbasiertes Konstitutivgesetz beschreibbar ist [24]. Wegen ihrer Bedeutung für die Entwicklung statistischer Bruchmodelle werden die Fasermodelle in dieser Arbeit noch genauer behandelt (Kapitel 4 und 5).

Nimmt man eine Einteilung der Modelle nach physikalischen Gesichtspunkten vor, darf der Aspekt der vorgesehenen Applikation nicht außer acht gelassen werden. Modelle, die zur Rißmodellierung biegungsbeanspruchter Proben geeignet sind, sind nicht automatisch auch dazu geeignet, Risse in glatten geraden Zugproben zu modellieren. So lassen sich deterministische Kontinuumsmodelle vom Typ 1, d. h. ohne stochastische Differenzierung des Kontinuums, dazu verwenden, gekerbte Biege- oder Zugversuche zu modellieren, da sich ein Riß infolge geometrisch bedingter Spannungskonzentration auch ohne Annahme einer Materialinhomogenität ausbildet. Bei glatten, ungekerbten Zugproben ohne Querschnittsänderung kann hingegen Rißsimulation nur sinnvoll durchgeführt werden, wenn auch im Modell explizit Inhomogenitäten eingesetzt werden, die als Rißinitiatoren wirken können. Es ist somit nicht überraschend, daß auch die überwiegende Mehrzahl der lokalen Modelle vom Typ 2, sieht man von den Fasermodellen ab, die ausschließlich zur Modellierung einachsiger Zugbelastung geeignet sind, zur Rißsimulationen an gekerbten Zug- oder Biegeproben, teilweise auch Scherproben, verwendet werden, um den aus der Heterogenität resultierenden zusätzlichen Effekt zu untersuchen. Dagegen gibt es wenige Anwendungen mit Nicht-Fasermodellen für den glatten ungekerbten Zugversuch, wozu auch elektrische Analogien gezählt werden können [20, 24, 59, 72].

Unterscheidet man die diskreten Modelle vom Typ 2, nun noch aufgrund statistischer Gesichtspunkte, erhält man eine ähnliche Verteilung der Arbeiten wie bei der Einteilung nach physikalischen Kriterien.

Die nichtkorrelierten Modelle, Typ 2.2, werden im großen und ganzen der Frage gewidmet, welche Verteilungen für die makroskopischen Antworten sich aus den Verteilungen der statistisch generierten lokalen Parameter ergeben. Hierbei dominieren zwei Aspekte: Zum einen wird fast ausschließlich die Verteilung der Spannungen, die zum Bruch führen, betrachtet, während die damit verknüpfte Verteilung der Schädigungen nicht weiter untersucht wird. Der zweite wichtige Aspekt ist die Frage nach asymptotischen Lösungen für unendlich große Systeme. Dabei bleibt die Klärung der Übertragbarkeit der betrachteten statistischen Modelle auf eine reale Struktur meist unbeantwortet.

In der überwiegenden Zahl der Arbeiten, die sich an realen Strukturen ausrichten (Typ 2.1), werden nur zufällige Konstellationen von Heterogenität betrachtet. Eine systematische Variation der Parameter, die die Heterogenität der Mikrostruktur bestimmen, und die Untersuchung der damit verbundenen Auswirkungen auf das makroskopische Verhalten unterbleibt dabei. Auch bei Modellen, die die Fenstertechnik zur Bestimmung stochastischer Variation verwenden, dominiert offenbar das Zufallsprinzip bei der Auswahl der Fenstergröße und -position. Dadurch bleibt der Einfluß unbestimmt, den die Wahl der Fensterposition (translational) bzw. der Fenstergröße in Bezug auf die Elementgröße des Modells (skalierend) auf die makroskopische Probenantwort hat. Vielfach müssen 2–3 Rechnungen mit ebenso vielen Systemgrößen oder Elementierungsverfeinerungen zur Darstellung eines erzielten Größeneffekts genügen, so daß die Lösungen unter dem statistischen Aspekt als Lösungen für zufällige Konstellationen gelten müssen. Diese lassen aber weder eine Aussage über eine statistisch bestimmte mittlere Probenantwort noch über die Streuung dieser Antworten zu. Der Grund für diese Beschränkungen dürfte in den langen Rechenzeiten der Modelle zu finden sein. Immerhin werden in [59] 5 verschiedene Elementierungsverfeinerungen eines FE-Netzes (mit jeweils einer zufällig generierten Konstellation) zur Darstellung des Größeneffekts der *peak*-Spannung von Betonzugproben verwendet, was umso beachtlicher ist, wenn man das Erscheinungsjahr 1987 in Rechnung stellt. Eine statistisch systematische Auswertung von Parametervariationen hinsichtlich der Porengröße und Elementierung (elastische Balkenelemente) findet sich hingegen in [75]: für 5 verschiedene Porositäten und 4 Elementierungsverfeinerungen sind jeweils die kumulativen Verteilungsfunktionen aus „vielen Rechnungen“ (aus der Graphik geschätzt: jeweils einige 100) dargestellt. Hierfür wurden allerdings auch 36 parallel geschaltete Rechner verwendet. In [5] findet sich eine systematische Untersuchung an Matrixeinschlüssen (parallele Fasern in einer Matrix, belastet senkrecht zur Faserrichtung). Hier werden die relativen Festigkeiten von Matrix und Einschlüssen in einem betrachteten Fenster und die Fenstergröße selbst (relative Einschlußgröße) variiert und die Konsequenzen für die Systemantwort in Abhängigkeit von dieser Variation untersucht.

1.2 Ziel und Inhalt dieser Arbeit

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Einfluß statistisch streuender lokaler Versagensgrenzwerte auf die individuelle und kollektive makroskopische Probenantwort einachsiger Mikroflachzugproben heterogener, quasi-spröder kristalliner Werkstoffe. Zugrundeliegende experimentelle Beobachtungen quasi-spröder versagender intermetallischer Titanalumine wurden von Wittkowsky und Wiesand-Valk an Einrichtungen der GKSS gemacht und in [83–85] beschrieben. Die Beobachtungen befinden sich in Einklang mit an anderen quasi-spröden Materialien gemachten Beobachtungen und werden in Kapitel 2 dieser Arbeit kurz referiert und mit Beobachtungen an anderen quasi-spröden Materialien verglichen. Die vorliegende Arbeit baut auf diesen Beobachtungen auf und ist rein numerischer Natur mit dem Ziel, eine Vorstellung dafür zu entwickeln, inwieweit sich reales, hauptsächlich aus der Heterogenität des

Gefüges resultierendes Materialverhalten mit einfachen Modellen wiedergeben läßt. Erstmals wird dabei der Einfluß der mikrostrukturellen Unordnung auf die makroskopische Antwort von Zugproben hinsichtlich Bruchspannung und -schädigung systematisch modellhaft mittels einer Finite-Elemente-Diskretisierung untersucht. Dabei werden die mit der Unordnung verknüpften statistischen Effekte der makroskopischen Antworten, wie Streuung und Probengrößeneffekt, qualitativ in Korrelation zur Verteilung und Streuung der lokalen Gefügeeigenschaften erfaßt und systematisch untersucht und die Ergebnisse wieder in Form kumulativer Verteilungen dargestellt.

Zur experimentellen Untersuchung des statistischen Verhaltens wurden mehrere Proben einer Probenserie verwendet, die in gleicher Orientierung und Größe aus einer Charge des jeweiligen Versuchsmaterials gewonnen wurden. Für das Modell werden solche Probenserien dadurch gewonnen, daß mehrmals nacheinander Proben generiert werden, deren Unterschied einzig in der zufällig gewonnenen Realisierung der Elementeigenschaften besteht, für die eine statistische Grundverteilung definiert ist. Die Grundverteilung bleibt dabei konstant. Diese Proben werden als „**nominell gleiche Proben**“ bezeichnet.

Zur Untersuchung der Probengrößeneffekte wurden für die Experimente unterschiedlich große Proben ähnlicher Geometrie in gleicher Orientierung aus einer Materialcharge gewonnen. Für Modellanalysen werden dazu Modellproben unterschiedlicher Größe aber gleicher Mikrostruktur generiert. Dabei verändern sich die äußeren Probenabmessungen und dementsprechend die Anzahl der die Probe bestimmenden Elemente gleichbleibender Eigenschaften, Form und Größe. Wie bei nominell gleichen Proben wird dabei wiederum die Grundverteilung für die Elementeigenschaften konstant gehalten, während die zufällig gewonnene Realisierung der statistisch zu bestimmenden Eigenschaften variiert.

Die experimentell beobachteten Probengrößeneffekte bestehen zumeist in einer Veränderung des Mittelwerts und der Streuung makroskopischer Bruchspannungen bei Veränderung der Probengröße unter Beibehaltung einer ähnlichen Geometrie⁴. Im Modell lassen sich weitere probengrößenabhängige Effekte beschreiben, wie etwa die Veränderung der mittleren Bruchschädigung und ihrer Streuung, die experimentell nicht unmittelbar zu beobachten sind.

Die Mikrostruktur einiger Titanalumine weist eine relativ grobe Kornstruktur auf, so daß zur Modellierung des Materialverhaltens ein lokaler Ansatz (Typ 2, s.o.) zur Beschreibung des Materialverhaltens erforderlich ist. Dabei werden die Körner des Gefüges als kleinste Materialeinheiten angesehen, die noch homogenisiertes Materialverhalten zulassen und ihrerseits genügend individuelle Eigenschaften für das Entstehen eines Mikrorisses besitzen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Körnern in Bezug auf ihre Größe, Orientierung, Form und mechanischen Eigenschaften werden dabei durch die Variation ihrer individuellen Last-Verformungsbeziehung berücksichtigt.

Ein erster Ansatz zur Modellierung des Probenverhaltens bei einachsiger Zugbelastung wurde in [83] durch Anwendung des Bündelkettenmodells unternommen, wobei die Skalierung des Modells auf die Materialgeometrie durch Definition einer Faserdimension bezüglich der Korngrößen des Werkstoffs vorgenommen wurde. Die Variation des Kornverhaltens wurde dabei durch eine Variation der elastischen Grenznormalspannung realisiert, die als WEIBULL-verteilt angenommen wurde. Es konnte dabei gezeigt werden, daß das individuelle Probenverhalten durch den statistischen Ansatz im allgemeinen gut wiedergegeben werden kann, Aspekte des kollektiven Probenverhaltens aber tendenziell verfälscht wurden. So ergaben die Simulationen bei optimiert angepaßten Modellparametern zu hohe Mikrorißdichten, zu schmale Streubän-

⁴In dieser Arbeit wird mitunter ein Probengrößeneffekt als „positiv“ (bzw. „negativ“) bezeichnet, wenn der Mittelwert der Bezugsgröße bei zunehmender Probengröße ebenfalls zunimmt (bzw. abnimmt).

der und teilweise die falsche Tendenz des Probengrößeneffekts. Als eine wesentliche Ursache wurde die Steifheit des Faserbündelmodells angenommen. Durch Einführung einer als *local-load-sharing*-Regel bekannten unterschiedlichen Verteilung der verbliebenen Faserlasten nach Bruch einzelner Fasern ließen sich deutliche Verbesserungen bei der Wiedergabe des Probenverhaltens in Bezug auf die experimentellen Beobachtungen erzielen. Dabei wurde diese Lastumverteilung phänomenologisch nach dem Gesichtspunkt lokaler Rißspitzenfelder dem Modellsystem künstlich eingefügt. Einerseits verläßt damit das Modellsystem die mikromechanische Kontinuumsanalogie, indem der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung der Fasern aufgehoben wird, und das Modellsystem zum rein statistischen Modell degradiert, und zum anderen werden weiterhin nur Spannungsfelder innerhalb von Bündelschichten berücksichtigt, während die Bündel der Bündelkette nach wie vor nur durch die kumulative Bündelkraft der Fasern miteinander in Beziehung stehen, und lokale Mehr- und Minderbelastungen sich nicht über die Bündelgrenzen hinaus auswirken.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Bewertung einfacher statistischer Verfahren zur Beschreibung des Probenverhaltens heterogener kristalliner Werkstoffe. Dabei sollen zwei Fragen beantwortet werden: Einerseits soll überprüft werden, wieweit das kollektive makroskopische Probenverhalten durch eine „natürliche“ Lastverteilung bei einer FE-Modellierung von dem des sehr viel einfacheren und schneller zu berechnenden Bündelkettenmodells abweicht. Zum anderen soll überprüft werden, inwieweit sich das reale, im Experiment beobachtete Probenverhalten mit einem FE-Modell unter Verwendung eines, dem Bündelmodell ähnlichen, einfachen lokalen Versagenskriteriums wiedergeben läßt. Der lokale Ansatz, das Materialverhalten durch Variation der Korneigenschaften zu beschreiben, wird dazu übernommen, wobei wiederum die Kornfestigkeiten durch eine WEIBULL-Verteilung statistisch variiert werden. Zur Berücksichtigung der lokalen Rißspitzenfelder bei Bruch erfolgt die Diskretisierung der Probe anstelle von Fasern einer Bündelkette durch isoparametrische Flächenelemente eines FE-Modells. Hierbei repräsentiert wiederum jedes Element jeweils ein Korn des Kontinuums. Das Materialgesetz der Elemente wird vereinfachend als isotrop und elastisch-ideal-spröde angenommen. Dabei erhält jedes Element eine individuelle Festigkeit in Form einer elastischen Grenznormalspannung, so daß sich bei angenommenem einheitlichen Elastizitätsmodul lediglich die Grenzdehnungen voneinander unterscheiden. Die Generierung der Grenzwerte erfolgt mit einer Pseudozufallsvorschrift. In diesem System stellt sich automatisch ein mehrachsiger Spannungszustand ein, womit bei lokalem Versagen durch Bruch einzelner Elemente eine natürliche Lastverteilung in alle Richtungen des Modellsystems erzielt wird.

Zur Bestimmung des kollektiven Systemverhaltens werden jeweils Ensembles nominell gleicher Modellproben, die also jeweils unterschiedliche Stichproben der gleichen Grundverteilung darstellen, generiert und berechnet. Mit diesen Ensembles von Modellproben, die Ensembles von Proben einer Versuchsreihe entsprechen, läßt sich sowohl der mittlere Wert wie auch die Streubreite und statistische Verteilung der makroskopischen Probenantworten hinreichend ermitteln. Die makroskopischen Probenantworten bestehen aus den Probenbruchlasten, den bis zum Probenbruch akkumulierten Mikrorissen, die, bezogen auf die Probengröße, in dieser Arbeit als Bruchschädigungen bezeichnet werden, und der räumlichen Verteilung der Mikrorisse. Die räumliche Verteilung der Mikrorisse spielt nur bei taillierter Probengeometrie eine Rolle. Die berechneten Probenantworten lassen sich mit den experimentell ermittelten Probenantworten vergleichen, woraus Rückschlüsse auf die Güte der primär angewandten Vorschrift zur Erzeugung der Kornfestigkeiten gezogen werden können.

Praktisch ergeben sich bei der Anwendung des Verfahrens einige Schwierigkeiten. Der statistische Ansatz beruht auf einer Modellbildung, bei der die Zahl der stochastischen Elemente der Anzahl der Körner einer Probe entspricht. Dies ist für makroskalige Proben bei Verwendung

von FE-Netzen wegen der begrenzten Rechnerleistung nicht möglich. Zwei sich ergänzende Ansätze zur Überwindung dieser Schwierigkeiten werden in der vorliegenden Arbeit angewendet. Unter Verwendung kleinerer FE-Netze wird das Verhalten kleinerer Proben studiert. Mit Hilfe geeigneter Transformationen wird dann deren Ensembleverhalten auf das größerer Proben gleicher Geometrie skaliert. Allerdings sind auch die hier verwendeten „kleinen Systeme“ mit einigen Tausend bis über einer Million Freiheitsgrade noch recht groß, so daß hierfür ein optimierter FE-Code entwickelt wurde, der ebenfalls in dieser Arbeit vorgestellt wird. Berechnet werden Mittelwert und Streuung sowohl von nomineller Bruchlast als auch der Bruchschädigungen für verschiedene Probengrößen und -geometrien. Dabei wird sich überraschenderweise zeigen, daß sich die kumulative Verteilung der Probenantwort näherungsweise durch eine *weakest-link*-Skalierung transformieren läßt.

Als weitere Möglichkeit zur Substitution rechenintensiver FE-Modelle wurde versucht, das numerisch erheblich schnellere Bündelkettenmodell durch modifizierte Lastverteilungsvorschriften so zu verändern, daß es dem FE-Modell vergleichbare Ergebnisse liefert. Dazu wird in dieser Arbeit das Modell in seiner bisher in der Literatur vorliegenden Form vorgestellt und sein Verhalten mit dem FE-Modell verglichen. Eine modifizierte Lastverteilungsvorschrift wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht vorgeschlagen, da sich zeigte, daß eine Lastverteilungsregel im Rahmen des in der Literatur behandelten Bündelkettenmodells keine befriedigende Lösung erbringen kann, sondern auf partikuläre Lösungen beschränkt bleibt. Eine Lastverteilungsvorschrift, die das individuelle Verhalten einer Modellprobe mit dem Bündelkettenmodell ungefähr so wiedergibt wie sie das FE-Modell wiedergibt, läßt sich nicht auf andere Modellproben übertragen, und eine Lastverteilungsvorschrift, die das mit dem Bündelkettenmodell berechnete kollektive Verhalten für eine vorgegebene Grundverteilung lokaler Bruchfestigkeiten annähernd gut wiedergibt, ist nicht erfolgreich auf andere Grundverteilungen übertragbar. Eine zufriedenstellende Lösung dieses Problems ist somit nicht trivial. Vermutlich läßt sie sich erst finden, wenn man sich von der Annahme starrer Schichten, also einer Umverteilung von Lasten nur innerhalb von Bündelschichten, löst. Dies wird in dieser Arbeit jedoch nicht mehr untersucht. (In Kapitel 7.3 wird darauf näher eingegangen.) Dafür wird ein Aspekt dieser Modelle genauer untersucht, der in der Literatur zu kurz kommt. Da die vorliegenden Untersuchungen zu diesem Modell vor allem den asymptotischen Grenzfall unendlich vieler Fasern im Blick haben, wird das Verhalten dieses Modells in Hinblick auf mittlere Bündelkettengrößen untersucht, also Größen die einerseits weit jenseits des bisher analytisch Behandelbaren liegen, andererseits aber auch nicht so groß sind, daß sie mit guter Näherung durch den asymptotischen Grenzfall ersetzbar wären. Dies ist eine Betrachtungsweise, die offenbar völlig neu ist und Lücken in der bisherigen Behandlung des Themas aufzeigt.

1.2.1 Aufbau und Gliederung

Die Arbeit besteht aus 4 Teilen und umfaßt 10 Kapitel. Teil 1 führt in die Fragestellung der Arbeit ein (Kapitel 1 und 2), im 2. Teil werden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Methoden und Modelle behandelt (Kapitel 3 und 4). Der 3. Teil widmet sich der Darstellung von Ergebnissen (Kapitel 5 und 6) und im 4. Teil werden die Ergebnisse miteinander und mit experimentellen Beobachtungen verglichen und bewertet (Kapitel 7–9). In Kapitel 10 sind farbige Abbildungen zusammengefaßt.

Der einführende Teil (Kapitel 1) befaßt sich mit dem Stand der stochastischen Bruchmodellierung in der Literatur und stellt dann Ziel und Inhalt der vorliegenden Arbeit dar. Der experimentelle Hintergrund wird in einem weiteren, eigenen Kapitel behandelt (Kapitel 2).

Die Methoden und Modelle teilen sich in grundlegende statistische Verfahren, wie die Erzeu-

gung pseudozufälliger Zahlen und die Eigenschaften grundlegender statistischer Verteilungen, soweit sie als Werkzeuge der Modellierung und Auswertung gebraucht werden (Kapitel 3), und die Darstellung der Modelle selbst (Kapitel 4), wobei Faser- und FE-Modelle getrennt dargestellt werden.

Eine Untersuchung der Fasermodelle mit einigen neuen Ergebnissen schließt sich in Kapitel 5 an. Die Ergebnisse der Finite-Elemente-Modellierungen werden im zentralen Kapitel 6 dargestellt.

Ein Vergleich der Ergebnisse von Faser- und FE-Modell wird in Kapitel 7 durchgeführt, während in Kapitel 8 die FE-Ergebnisse mit experimentellen Beobachtungen verglichen werden. Kapitel 9 versucht eine zusammenfassende Bewertung der erzielten Ergebnisse.

In Kapitel 10 sind alle farbigen Abbildungen zusammengefaßt, wobei die Reihenfolge der Abbildungen im wesentlichen ihrer Reihenfolge im Text entspricht. Bei jeder Abbildung ist neben ihrer Kurzbeschreibung ein Verweis auf die Seite angebracht, von welcher auf die entsprechende Abbildung verwiesen wird.

Kapitel 2

Experimentelle Grundlagen

Zwischen 1995 und 1998 wurden bei der GKSS Zugversuche an Mikroflachzugproben, Abbildungen 2.1 und 2.2, aus spröde brechenden intermetallischen Titanaluminiden durchgeführt. Ziel dieser Untersuchungen war es, den Zusammenhang zwischen der Mikrostruktur des Materials und dem Probenverhalten zu erhellen. Dabei wurden qualitative Beobachtungen des Materialverhaltens auf mikrostruktureller Ebene in situ bis direkt vor den Probenbruch festgehalten und durch quantitative Meßauswertungen ergänzt [83, 85], für die zum Teil in der übrigen Literatur keine anderen Beispiele vorhanden sind.

Auch wenn die verwendeten Werkstoffe aus einem frühen Entwicklungsstadium für praxisrelevantere Titanaluminide stammen und daher eine „abgeschlossene Versuchsreihe“ darstellen, da die Materialien nicht mehr hergestellt werden und somit für weitere Versuche nicht mehr zur Verfügung stehen, haben die Erkenntnisse aus diesen Versuchen diese Arbeit erst ermöglicht und sollen deshalb hier kurz zusammengefaßt werden.

Zu Beginn, in Abschnitt 2.1, werden unterschiedliche Untersuchungen, die an dem Werkstoff „ γ -TiAl“ vorgenommen wurden, zusammengefaßt. Aufgrund seiner großkörnigen Mikrostruktur und wegen der für diesen Werkstoff gemessenen Mikrorißverteilung in Abhängigkeit von der Probenspannung eignet sich dieser Werkstoff besonders gut als Referenzmaterial für die in dieser Arbeit vorgestellten Modellierungsansätze. Anschließend, in Abschnitt 2.2, werden Beobachtungen an anderen, sich ähnlich verhaltenden Titanaluminiden kurz zusammengefaßt.

Am Schluß dieses Kapitels werden die Beobachtungen durch vergleichbare Beobachtungen über sprödes Materialverhalten aus der Literatur ergänzt, um zu zeigen, daß sich die aus den Versuchen an Titanaluminiden ergebenden Schlußfolgerungen nicht allein auf diesen Werkstoff beschränken.

2.1 Beobachtungen an γ -TiAl-Mikroflachzugproben

2.1.1 Werkstoff

Die Zusammensetzung des Werkstoffs ($\alpha_2 + \gamma$)-TiAl besteht aus Titan, Aluminium und kleinen Zusätzen von Chrom und Silizium; seine Kurzbezeichnung wird in [85] mit Ti-47 Al-2 Cr-0.2 Si (At%) angegeben.

Hergestellt wurde der Werkstoff durch Blockguß mit anschließendem 4-stündigem heiß isostatischen Pressen bei 1185°C und einem Druck von 140 MPa. Anschließend wurde der Werkstoff

Abbildung 2.1: taillierte Mikroflachzugprobe

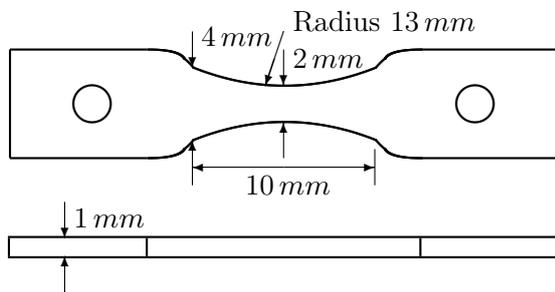
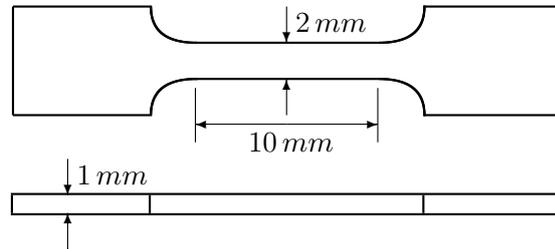


Abbildung 2.2: Mikroflachzugprobe mit konstantem Querschnitt



Abbildungen nach [83]

bei einer Temperatur von 1220°C und einem jeweiligen Umformgrad von 70% zweifach isotherm geschmiedet.

Die Mikrostruktur (Abbildung 2.3) dieses Werkstoffs weist eine ungeordnete Anordnung von 10-20 μm großen globularen γ -Körnern (dunkel) mit α_2 -Phase (weiß) in den Kornzwischenräumen auf. Die Ausrichtung der Körner ist zufällig.

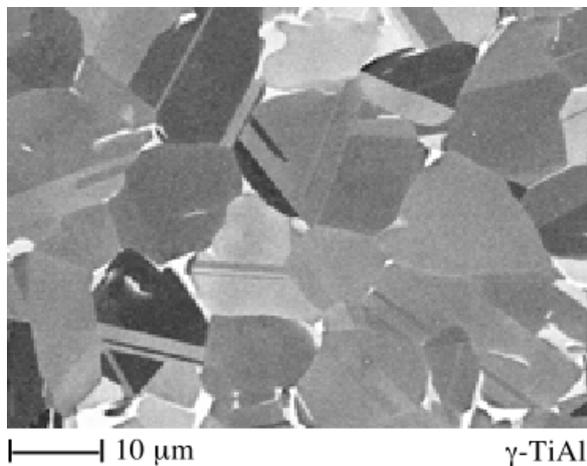
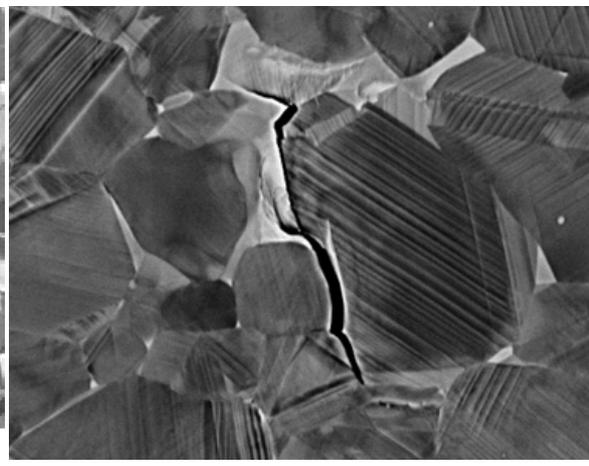
Abbildung 2.3: Mikrostruktur γ -TiAlAbbildung 2.4: Mikroriß in γ -TiAl

Abb. aus [83]

Vergrößerung, Abb. aus [85], Zugrichtung: \longleftrightarrow

2.1.2 Durchgeführte Versuche

Taillierte Proben nach Abbildung 2.1 wurden auf einem Zugschisch im Rasterelektronenmikroskop (REM) quasistatisch mit der Abzugsgeschwindigkeit 0.1 $\mu\text{m}/\text{s}$ bis zum Bruch belastet. Aufgezeichnet wurde die Kraft über der Verschiebung der Probenaufhängung. Zur Bestimmung der Kraft-Verschiebungskurven der Probenmeffläche wurden die gemessenen Verschiebungsdaten mit Daten aus FEM-Rechnungen korrigiert. Während der Zugversuche wurden

in-situ die Verformungs- und Versagensvorgänge im REM mit BSE-Mode (rückgestreute Elektronen) beobachtet.

Von einigen Probenhälften wurden post mortem unter dem REM Polaroid-Photos der Oberflächen in 2000–3000-facher Vergrößerung mit BSE-Mode, in Zweifelsfällen mit SE-Mode (Sekundärelektronen-Mode), gemacht. Anhand dieser Bilder wurde die Mikrorißdichte bestimmt [83].

2.1.3 Schädigungsverhalten und Probenbruch

Die in-situ-Beobachtungen von Mikroflachzugproben unter dem REM dienen der Beschreibung des Verformungs- und Schädigungsverhaltens unter uniaxialer Zugbelastung. Hierbei wurde die Schädigungsentwicklung in Abhängigkeit von der angelegten Zugkraft beobachtet. Die an der Probenaufhängung gemessene Zugkraft wurde mittels FEM-Rechnungen in Probenspannungen umgerechnet.

Das Versagen des Materials erfolgt in mehreren Phasen. Zuerst bilden sich bei ca 400 MPa lokal einzelne Verformungszonen mit Zwillingsbildung, deren Dichte mit zunehmender Probenbelastung ansteigt. Ab etwa 500 MPa bilden sich erste Mikrorisse an Grenzen, an denen verschieden orientierte Rekristallisationszwillinge aneinanderstoßen und an Grenzen von γ -Körnern, die auf Verformungszwillinge stoßen. Bei nur geringer Spannungserhöhung wachsen die Mikrorisse auf die Länge von Körnern an, wachsen jedoch nicht in die angrenzenden Körner hinein. Weitere Laststeigerung führt zunächst nur zur Bildung weiterer diffus verteilter Mikrorisse, bevor dann schließlich bei ca 600 MPa die bereits bestehenden Mikrorisse anfangen, über ihre ursprüngliche Länge hinauszuwachsen und sich zu verzweigen; bei ca 650 MPa erreichen einzelne Mikrorisse eine Länge von ca $50 \mu\text{m}$, also 2–3-fache Korngröße. Danach erfolgt das plötzliche Durchreißen der Probe. Die Orientierung der Mikrorisse ist immer etwa senkrecht zur Zugrichtung, ihre Dichte streut sehr stark, wobei ihr Abstand untereinander allgemein groß genug ist, daß eine Überlappung ihrer Rißspitzenspannungsfelder selten ist. Eine positive Korrelation zwischen der Bruchspannung und der Zahl der Mikrorisse wird nicht beobachtet. Wittkowsky berichtet sogar, daß die Probe mit der höchsten Bruchspannung die geringste Anzahl von Mikrorissen aufwies [85]. Diese Aussage läßt sich wegen der geringen Zahl untersuchter Proben jedoch nicht verallgemeinern.

Die Mikrorisse (vgl. Abbildung 2.4) bleiben aufgrund der Plastifizierung des Materials auch nach Probenbruch erhalten. Es war dadurch möglich, ihre Lage und Größe nach dem Probenbruch auszumessen.

2.1.4 Mikrorißverteilungen

Die taillierte Probenform (Abbildung 2.1) eignet sich dazu, das Verformungsverhalten in Abhängigkeit von der Spannung auch post mortem zu untersuchen, weil sich aufgrund der Probenform entlang der Meßlänge eine kontinuierliche Spannungssteigerung einstellt und somit Rückschlüsse auf die Spannungsabhängigkeit der Mikrorißbildung gezogen werden können. Aufgrund der starken Querschnittsschwächung in Probenmitte erfolgte der Probenbruch immer in Probenmitte. Nach dem Probenbruch wurden unter dem Rasterelektronenmikroskop abschnittsweise Photographien der Probenoberfläche in bestimmten Abständen zur Rißkante angefertigt und anschließend aneinandergeliebt, so daß kontinuierliche, vergrößerte REM-Aufnahmen von $80 \mu\text{m}$ -breiten Streifen über die Gesamtbreite der taillierten Proben zur Verfügung standen. Anhand der Bilder wurden die entstandenen Mikrorisse „von Hand“ ausge-

zählt und die Summen der Mikrorißlängen bezogen auf die Probenoberfläche als Rißdichte in Abhängigkeit von der Entfernung zur Bruchkante wiedergegeben [83].

Die gemessenen Werte sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt und in Abbildung 10.1 auf Seite 136 graphisch dargestellt. Dabei zeigt sich, daß bereits im Abstand von ca 2 mm von der

Tabelle 2.1: An taillierten Mikroflachzugproben gemessene Rißdichten
Abstand von der Bruchkante, Rißdichte [mm/mm^2]

Abstand [mm]	Probe			
	A	B	C	D
0.2	1.65	1.65	0.75	2
0.4			1.371	
0.6			3.189	
0.7	1.25	1	2.7	1.75
1.2	1.7	0.4	1	1.1
1.7	0.45	0.277	1.15	0.277
2.26	0			
2.3		0		
2.36			0	
2.38				0

Bruchkante praktisch keine Mikrorisse mehr zu beobachten sind. Weiterhin zeigt sich innerhalb des Bereichs, in dem Mikrorisse zu beobachten sind, eine recht geringe Abhängigkeit der Mikrorißdichte von der Entfernung zur Bruchkante. Die Zahl der Mikrorisse weist allerdings starke lokale Fluktuationen auf. Die Bildung von Mikrorissen scheint also nur innerhalb eines recht geringen Spannungsumfangs möglich zu sein, wobei ihre Häufigkeit dann mehr oder weniger zufällig ist. Dies korrespondiert recht gut mit den Beobachtungen, die an Proben in-situ gemacht wurden.

2.1.5 Makroskopische Bruchspannungen

Tabelle 2.2: Abmessungen und Bruchlasten taillierter Mikroflachzugproben
Dicke, Breite im Kerb [mm], Bruchlasten [N] und Bruchspannungen [MPa]

Probe	Dicke	Breite	F	σ_{Br}
1	0.926	1.924	1058.54	594.1
2	0.937	1.906	934.15	523.7
3	0.939	1.925	968.29	535.7
4	0.907	1.899	1000.00	580.6
5	0.863	1.916	1031.71	624.0
6	0.983	1.901	1109.76	593.9
7	0.890	1.896	1024.39	607.1
MW				579.9
SA				37.0

Die an den taillierten Proben ermittelten Bruchkräfte und die sich aus diesen Werten und den genauen Probenabmessungen ergebenden Bruchspannungen dieser Proben sind in Tabelle 2.2 wiedergegeben. Da gleichzeitig keine exakten Last-Dehnungskurven aufgenommen werden konnten, sind in Abbildung 10.3, Seite 137, die gemessenen Kraft-Aufhängungsverlängerungen dargestellt.

2.2 Experimentelle Untersuchungen an anderen Titanaluminiden

An 3 ähnlichen Titanaluminiden wurden Zugversuche mit Mikroflachzugproben konstanten Querschnitts (z. B. wie in Abbildung 2.2) durchgeführt. Ziel dieser Versuche war es, einen Zusammenhang zwischen mikrostruktureller Gefügeunordnung und makroskopischem Versagensverhalten herzustellen [83].

Zur Erfassung des Probengrößeneffekts wurden von jedem dieser Werkstoffe jeweils zwei unterschiedliche Probengrößen untersucht, wobei das Verhältnis der Meßlängen zu ihren Breiten jeweils gleich 5 war. Die Abmessungen der Proben variierten. Bei zwei der Werkstoffe, TAB und TSA, betrug die Probendicke 1 mm, beim dritten Werkstoff, TSA-Blech, betrug die Probendicke 1.5 mm. Die jeweils kleinen Proben hatten die Meßlänge 10 mm bei einer Probenbreite von 2 mm, die großen Proben von TSA und TSA-Blech betragen 4 mm × 20 mm, die von TAB 5 mm × 25 mm.

Aufgenommen wurde, wie bei den Proben in Abschnitt 2.1, wiederum die Kraft über der Verlängerung der Probenaufhängung. Die Zugversuche wurden in normalen Zugapparaturen durchgeführt, wobei die Probenaufhängung der kleinen Proben über gehärtete Stahlstifte unter den Probenschultern, bei den großen Proben über Einspannungen durch Spannbacken vorgenommen wurde. Alle Proben wurden mit einer Verformungsgeschwindigkeit von 10^{-5} pro Sekunde bis zum Bruch belastet. Alle Proben brachen senkrecht zur Zugrichtung durch, wobei der Ort innerhalb der Meßlänge zufällig war.

Im folgenden werden die verwendeten Werkstoffe und die Ergebnisse der Zugversuche dargestellt.

2.2.1 TAB

Der Werkstoff mit der Kurzbezeichnung Ti-47 Al-4(Mn,Cr,Nb,Si,B) (at.%) entstand durch mit Argon-Gas verdüstertes Schmelzpulver der Teilchengröße 180–500 μm , welches bei 1300°C und 200 MPa 2 Stunden isostatisch gepreßt wurde.

Das entstandene Gefüge (siehe Abbildung 2.5) besteht aus globularen γ -Körnern (grau) in der großen Variationsbreite von 1–15 μm Durchmesser und 1–5 μm großen α_2 -Körnern (weiß) in den Zwischenräumen. Die schwarzen Punkte entsprechen Titanboriden oder Löchern, die bei der Probenpräparation durch herausgefallene Titanboride entstanden. Das Gefüge ähnelt dem von γ -TiAl, die Korngrößen schwanken aber sehr viel stärker und es liegen mit den Titanboriden weitere Gefügebestandteile vor.

Das Verhalten dieses Werkstoffs im Zugversuch ist zu Anfang ähnlich dem von γ -TiAl, d. h. es bilden sich nach lokalem plastischen Fließen einzelne, arretierende Mikrorisse. Allerdings bilden sich die Mikrorisse nicht zwischen den Körnern und Zwillingen der γ -Körner, sondern vorzugsweise an den Grenzen zwischen γ - und α_2 -Körnern oder auch durch die α_2 -Körner hindurch, wobei ihre Länge der Größe von α_2 -Körnern entspricht, womit die Mikrorisse deutlich kürzer sind als die bei γ -TiAl.

Abbildung 2.5: Mikrostruktur TAB

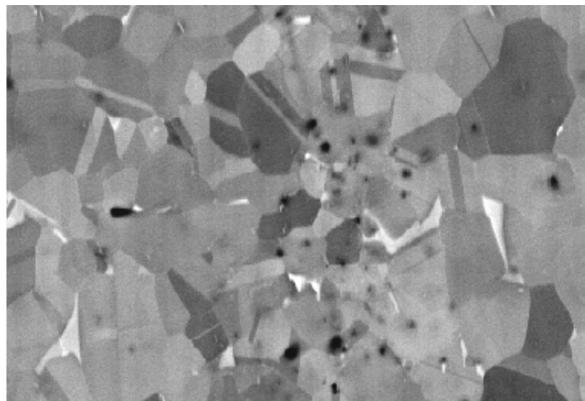
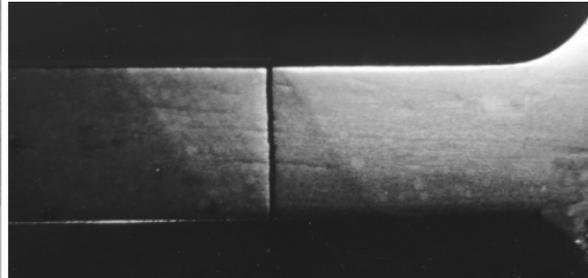


Abb. aus [83]

Abbildung 2.6: Lüdersband

Abb. aus [83], Zugrichtung: \longleftrightarrow

Die makroskopischen Verformungskurven zeigen einen ausgeprägten Streckgrenzeneffekt (vgl. Abbildung 10.4 auf S. 137), der mit der Ausbildung eines Lüdersbandes (siehe Abbildung 2.6) an der Probenoberfläche einhergeht und dessen Ausdehnung durch das Brechen der Probe beendet wird. Der Bruch erfolgt stets unter 90° zur Probenachse und liegt vollständig innerhalb des Lüdersbands. Die Querschnittsschwächung durch das Lüdersband macht ca. 3–4% aus, während seine Länge im Mittel sowohl bei den kleinen wie auch bei den großen Proben 20% der Probenmeßlänge ausmacht. Allerdings schwankt diese Länge und wurde umso größer, je größer der Streckgrenzenbereich vor dem Probenbruch anwächst, d. h. je länger das Plateau in der Kraft-Verlängerungskurve wurde, desto größer wurde die Längsausdehnung des im Winkel von ca. 45° eingeschnürten Probenbereichs.

Die makroskopischen Bruchspannungen der kleinen Proben betragen im Mittel 597 MPa und die der großen 609 MPa. Die Extremwerte der Bruchspannungen betragen 584 und 637 MPa bei den kleineren und 598 und 625 MPa bei den größeren Proben. Die errechneten Standardabweichungen betragen 11.3 und 8.5 MPa. Alle angegebenen Spannungen entsprechen der Kraft bezogen auf die verformte Bruchfläche.

An drei der kleinen Proben wurden außerdem das Auftreten von Mikrorissen unter dem REM post mortem untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß Mikrorisse nur im Bereich der Querschnittsschwächung des Lüdersbandes vorhanden waren. Aus der Gesamtlänge der Mikrorisse ergab sich bei allen untersuchten Proben recht konstant eine Mikrorißdichte von etwa 2 mm/mm^2 im untersuchten Bereich.

2.2.2 TSA

Dieser Werkstoff mit der Kurzbezeichnung Ti-23.5 Al-5.5 Si-10 Nb (at.%) wurde, ähnlich wie TAB, pulvermetallurgisch hergestellt. Dazu wurde das Legierungspulver 4 Stunden bei 1000°C und 200 MPa isostatisch gepreßt.

Das Gefüge dieses Werkstoffs (siehe Abbildung 2.7) besitzt aber eine völlig andere Struktur: In einer Matrix aus $\alpha_2\text{-(Ti,Nb)}_3\text{(Al,Si)}$ befindet sich ein zusammenhängendes Netzwerk einer

Abbildung 2.7: Mikrostruktur TSA

Abbildung 2.8: Bruchfläche von TSA mit Pore

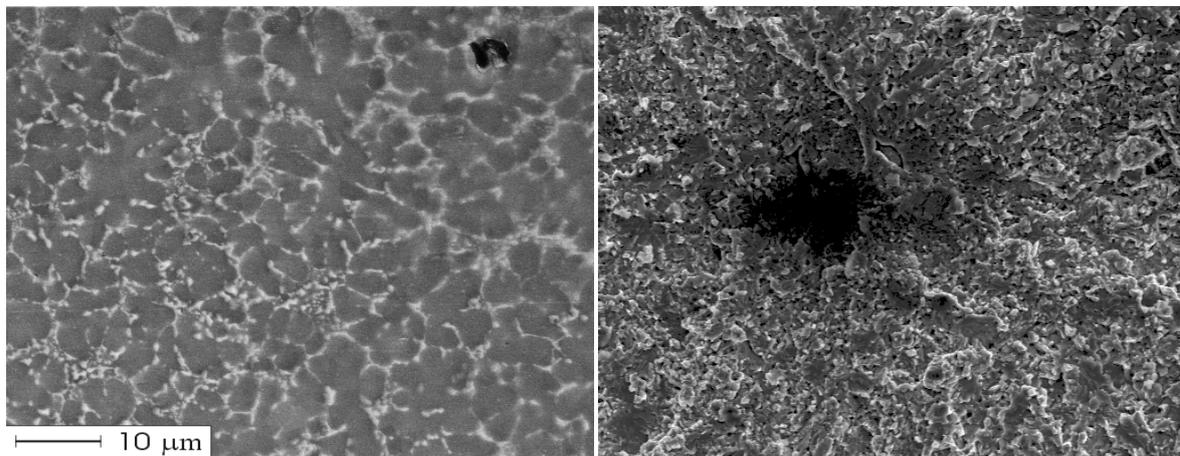


Abb. aus [82]

Abb. aus [82], Zugrichtung \perp Bildebene

ξ -Silizidphase. Eine deutlich abgegrenzte Kornstruktur wie bei γ -TiAl und TAB ist dabei nicht vorhanden.

Im Zugversuch bricht das Material direkt aus dem elastischen Bereich heraus (vgl. Abbildung 10.5 auf S. 137), ohne daß vor dem Bruch im REM Mikrorißbildung beobachtbar wäre. Auch post mortem lassen sich keine Hinweise auf Mikrorißbildung finden. Genauere Untersuchungen der Bruchflächen zeigten, daß der Bruch dieses Werkstoffs von im Werkstoff vorhandenen Poren ausgeht, ohne daß der einmal initiierte Riß dann noch einmal zum Stillstand käme. In Abbildung 2.8 ist eine solche rißauslösende Pore auf der Bruchfläche zu sehen.

Die Bruchspannungen der Proben liegen im Mittel höher als bei γ -TiAl und TAB, weisen aber eine wesentlich höhere Streuung auf. Die kleineren Proben brachen im Mittel bei 652 MPa, wobei Werte zwischen 493 und 814 MPa gemessen wurden, die Bruchspannung der größeren Proben betrug im Mittel 610 MPa bei fast gleicher minimaler Versagensgrenze von 499 MPa, während die höchste bei den großen Proben gemessene Last nur 694 MPa betrug. Die Standardabweichungen der Bruchspannungen ergeben 93.4 und 52.7 MPa.

2.2.3 TSA-Blech

Das Ausgangsmaterial dieses Werkstoffs ist das zuvor behandelte TSA, das bei 1200°C auf 1.5 mm Dicke ausgewalzt wurde.

Durch den Walzprozeß werden die ξ -Silizid-Netzwerke zerbrochen und zu globularen Teilchen von etwa 2 μ m Durchmesser verformt (siehe Abbildung 2.9). Diese bilden dabei häufig Ketten oder Cluster von Teilchen, wobei aber keine Vorzugsrichtung aus dem Walzprozeß erkennbar ist.

Im Zugversuch zeigte sich im gewalzten Material eine ausgedehnte Phase der Mikrorißbildung, die mit einer plastischen Deformation der Proben einhergeht. Beispiele der gemessenen Last-Verformungskurven dieses Werkstoffs sind in Abbildung 10.6, Seite 137, zu sehen. Die Mikrorisse entstehen hier an den Grenzen der globularen Einschlüsse zur Matrix, wodurch die Länge der Mikrorisse, bedingt durch die Länge der Ketten aneinandergereicher Einschlüsse, stark schwankt. In Abbildung 2.10 sind einige solcher Mikrorisse zu sehen.

Abbildung 2.9: Mikrostruktur TSA-Blech Abbildung 2.10: TSA-Blech mit Mikrorissen

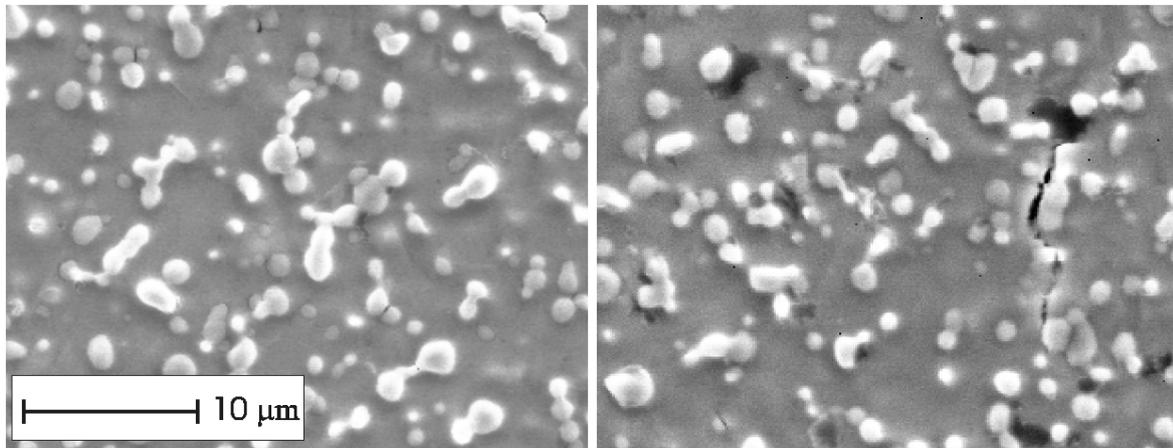


Abb. aus [82]

Abb. aus [82], Zugrichtung: \longleftrightarrow

Die Bruchspannungen dieses Werkstoffs liegen deutlich höher als die bei den zuvor behandelten Werkstoffen. Im Mittel brachen die kleinen Proben bei 833 MPa, die großen Proben bei 820 MPa, wobei die Streuungen sehr viel geringer sind, als beim nicht gewalzten TAB. Die Mindestbruchspannungen der kleinen Proben lag bei 735, der großen bei 800 MPa, während die maximal gemessenen Bruchspannungen bei den kleinen 898 und bei den großen Proben bei 836 MPa lagen. Die Standardabweichungen für die Bruchspannungen ergaben sich zu 51 MPa und 14 MPa.

Auch bei diesem Werkstoff wurden post mortem drei Proben unter dem REM auf Mikrorisse untersucht. Dabei zeigte sich, daß die Mikrorißdichte von Probe zu Probe recht stark schwankte. Die an den einzelnen Proben gemessenen Mikrorißdichten betragen 7,8, 10,0 und $14,5 \text{ mm/mm}^2$.

2.2.4 Interpretationen

In Tabelle 2.3 sind die wichtigsten Eigenschaften der untersuchten TiAl-Werkstoffe und die wichtigsten Ergebnisse von TiAl-Zugversuchen an Proben dieser Werkstoffe zusammengefaßt. Dabei wird deutlich, daß das Entstehen einzelner, arretierender Mikrorisse mit der Korn- und Ausscheidungsstruktur verknüpft ist. Dabei entspricht die Länge der Mikrorisse der Größe der Körner, an denen sie entstehen. Während der einzige Werkstoff, der keine rißbildenden Körner bzw. Einschlüsse aufweist, direkt aus dem elastischen Regime heraus bricht, zeigen die Werkstoffe mit Mikrorißbildung einen Anteil plastischer Verformung vor dem Versagen.

Die Streuung der Bruchfestigkeiten ist für den Werkstoff ohne Mikrorißbildung und ohne Duktilität mit Abstand am größten. Bei den mikrorißbildenden Werkstoffen kann aber keine Korrelation zwischen der Mikrorißdichte und der Streuung der Bruchspannung festgestellt werden. Während die Streuung der Bruchspannung bei γ -TiAl etwa genauso groß ist, wie bei den kleinen Proben aus TSA-Blech, ist die Mikrorißdichte des Blechs beim Probenversagen etwa fünfmal so hoch, wie bei den γ -TiAl-Proben. Die Mikrorißdichte der TAB-Proben ist hingegen wiederum vergleichbar der der γ -TiAl-Proben, die Streuung der Bruchfestigkeiten ist jedoch bei TAB deutlich geringer als bei γ -TiAl.

Tabelle 2.3: 4 TiAl-Werkstoffe, Eigenschaften und Ergebnisse der Zugversuche

Material	γ -TiAl	TAB		TSA		TSA-Blech	
Struktur	γ -Körner	γ - und α_2 -Körner		ξ -Netzwerk in Matrix		ξ -Silizide in Matrix	
Korngröße [μm]	20	1–15 u. 1–5		—		2	
Mikrorisse	ja	ja		nein		ja	
Mikrorißdichte [$\frac{mm}{mm^2}$]	etwa 2 [†]	2 ^{††}		—		10 ^{†††}	
Probendicke [mm]	1	1		1		1.5	
Probengröße [mm^2]	Min: 2×10	2×10	5×25	2×10	4×20	2×10	4×20
Anzahl Proben	7	16	24	17	18	8	7
Bruchspannungen							
MW [MPa] (=100%)	580	597	609	652	610	833	820
SA, abs [MPa]	37	11	9	93	53	51	14
SA, % von MW [%]	6	2	1	14	9	6	2
Min, abs [MPa]	524	584	598	493	499	735	800
Min, % von MW [%]	90	98	98	76	82	88	98
Max, abs [MPa]	624	637	625	814	694	898	836
Max, % von MW [%]	108	107	103	125	114	108	102

[†] an der schmalsten Stelle ^{††} im Bereich des Lüdersbands ^{†††} starke Variation

Deutlich festzustellen ist dagegen bei allen Werkstoffen, bei denen zwei Probengrößen mit jeweils ähnlicher Gometrie untersucht wurden, daß die Streuung der Bruchspannungen bei den größeren Proben geringer ist, als bei den jeweils kleineren Proben. Bei den TSA-Werkstoffen nimmt außerdem die mittlere nominelle Probenspannung bei Probenbruch ab, wenn die Proben größer werden. Die maximal gemessene Probenbruchspannung nimmt bei diesen beiden Werkstoffen sehr stark ab, während die kleinste gemessene Probenbruchspannung gleichzeitig zunimmt, wenn die Proben größer werden. Bei den Proben aus TAB nimmt ebenfalls die minimal gemessene Probenspannung zu und die maximal gemessene ab, wenn die Proben größer werden, da aber die Streuung der Bruchspannungen recht gering ist, weichen die absolut gemessenen Werte nur wenig voneinander ab. Dabei entsteht ein geringfügig positiver Größeneffekt, d. h. die mittlere Probenbruchspannung ist bei den größeren Proben etwas höher (um 2%) als bei den kleineren Proben. Wegen der geringen Streuung und der kleinen Datenmenge kann dies aber durchaus auch ein zufälliges Ergebnis sein und ein gleichermaßen geringer negativer Probengrößeneffekt wäre bei einer anderen Stichprobe ebenfalls denkbar.

2.3 Beobachtungen zum Versagen anderer heterogener spröder Werkstoffe

Die in Abschnitt 2.2.4 zusammengefaßten Beobachtungen stimmen recht gut mit Beobachtungen überein, die an anderen spröden Werkstoffen gemacht wurden.

Chermant [17] beschreibt den Einfluß von Inhomogenitäten auf das Bruchverhalten von Keramiken. Dabei spielt das Vorhandensein einer zweiten Phase als Ursprung von Rißinitiierung eine wichtige Rolle, da diese oftmals der Ausgangspunkt des Materialversagens ist. Liegt aber

eine zweite Phase nicht vor, werden Risse im allgemeinen an Poren oder anderen Defekten initiiert. Die kritische Größe dieser Defekte, bei der also katastrophales Versagen eintritt, kann die Korngröße des mittleren Keramikkorns erreichen oder sogar größer sein. Die makroskopische Bruchspannung von Proben hängt dabei deutlich von der Größe der Poren oder Einschlüsse ab: je größer diese sind, desto geringer ist die nominelle Spannung, bei der die Probe bricht. Die Abhängigkeit der Probenbruchspannung von der Größe der Körner und der Porosität wird auch bei anderen spröde brechenden Materialien, wie etwa Sandstein und Beton, beschrieben [4].

Mikrorißbildung bei Probenspannungen, die deutlich unter den Spannungen liegen, bei denen katastrophales Probenversagen eintritt, ist ein Phänomen, welches bei vielen heterogenen Werkstoffen beobachtet wird. In Beton etwa treten Mikrorisse bereits bei geringen Spannungen auf [2]. In Metall-Matrix-Kompositen, die aus kurzen metallischen Fasern oder Partikeln in einer nichtmetallischen Matrix bestehen, entstehen Mikrorisse an den Faserspitzen in der Matrix, bilden Hohlräume und vereinigen sich, bevor der makroskopische Riß zum Probenversagen führt [7]. Diese Mikrorisse sind für sich duktil innerhalb der Matrix, während das Material auf der Makroebene sprödes Verhalten zeigt. Auch hierbei ist der Bruchprozess stark durch die Verteilung, Orientierung, Größe und den gegenseitigen Abständen der Armierungspartikel beeinflusst.

Probengrößeneffekte sind typisch für spröde Werkstoffe. Im einfachsten Fall ergibt sich dieser Probengrößeneffekt aus der von Weibull [81] entwickelten *weakest-link*-Vorstellung, die zu der Volumenabhängigkeit der Bruchspannung

$$\frac{\sigma(V_1)}{\sigma(V_2)} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1/m} \quad (2.1)$$

führt. Gl. (2.1) verknüpft die Bruchspannungen $\sigma(V_1)$ und $\sigma(V_2)$ zweier Volumina V_1 und V_2 miteinander; m ist dabei der vom Material abhängige WEIBULL-Parameter. Danach ergibt sich also eine umso geringere Bruchspannung, je größer das Volumen eines Prüfkörpers ist. Die physikalische Vorstellung dahinter ist, daß die Wahrscheinlichkeit, irgendwo im Körper eine kritische Bedingung für das Versagen vorzufinden, umso größer ist, je größer der betrachtete Bereich ist. Bažant [10] merkt dazu an, daß der Größeneffekt vom WEIBULLtyp nur für rein spröde Werkstoffe gilt, die bei Rißinitiation sofort versagen. Mikrorißentstehung vor Erreichen des Probenlastmaximums verursacht einen weiteren Größeneffekt, der aber wegen des Zusammenwirkens vieler statistisch verteilter Schädigungen komplexer ist, als der durch genau ein *weakest-link* verursachte Größeneffekt vom WEIBULL-Typ (siehe dazu auch die oben dargestellten an Titanaluminiden beobachteten Größeneffekte). Daß auch in diesem Fall der beobachtete Größeneffekt auf einen statistisch begründeten *weakest-link*-Mechanismus zurückzuführen ist, wird später im Rahmen dieser Arbeit gezeigt. Allerdings ist hier das „*weakest link*“ nicht eine eindeutig lokalisierbare Stelle im Werkstoff, sondern eine Struktur von statistisch verteilten schwachen Stellen, nach deren Versagen die Probe auch makroskopisch versagt.

Rossi [59], (siehe auch [2]) zeigt den Einfluß der Probengröße bei Beton bei gleichmäßiger Feuchtigkeit und Temperatur an unterschiedlich großen Prüfzylindern mit gleichen Geometrieverhältnissen, indem er die gemessenen Versagenshäufigkeiten eines Ensembles von Proben für jede Probengröße in Abhängigkeit von der Zugspannung darstellt. Dabei wurden je 100 Prüfkörper mit den Durchmessern 89, 112 und 160 mm und konstantem Länge:Durchmesser-Verhältnis von 2 auf Zug belastet. Dabei zeigt sich deutlich, daß die Versagenszugspannungen umso kleiner sind, je größer das Prüfkörpervolumen ausfällt. Es ergaben sich dabei mittlere

Bruchspannungen von 2.96, 2.75 und 2.52 MPa, wobei sich die Standardabweichungen dieser Proben von 0.12 auf 0.09 bis auf 0.08 MPa verringerten. Als Faustformel für den Probengrößeneffekt fand er die Beziehung

$$\bar{\sigma}_B = 21.95 V^{-0.142} \quad (2.2)$$

$$\varphi_B = 11.46 V^{-0.248} \quad (2.3)$$

für die mittlere Zugspannung, $\bar{\sigma}_B$, und deren Standardabweichung, φ_B , bei Raumtemperatur heraus. V ist dabei das Prüfkörpervolumen.

Die in Gl. (2.2) angegebene Abhängigkeit der mittleren Bruchspannung vom Volumen beschreibt die beobachtete Volumenabhängigkeit phänomenologisch. Mathematisch entspricht dabei Gl. (2.2) der WEIBULL-Beziehung Gl. (2.1). Würden die Betonzylinder aber nach dem *weakest-link*-Mechanismus versagen, müßte auch die Streuung, φ_B , die gleiche Volumenabhängigkeit aufweisen, wie die Bruchspannung $\bar{\sigma}_B$. Da dies aber nicht der Fall ist, ergibt sich daraus ein Hinweis, daß der beobachtete Versagensmechanismus *nicht* dem einfachen *weakest-link*-Mechanismus vom WEIBULLtyp Gl. (2.1) entspricht.

Kapitel 3

Statistische Verteilungen

Statistische Verteilungen sind ein zentrales Thema in dieser Arbeit. Einerseits werden diskrete Stichprobenwerte, die einer bestimmten Grundverteilung entsprechen, als Eingabewerte benötigt, andererseits werden Ergebnisse nominell gleicher Modellproben, also von Modellproben, die sich nur durch ihre individuellen Festigkeitseigenschaften ihrer Elemente unterscheiden, diese Festigkeiten aber der selben Grundverteilung entstammen, wiederum unter dem Aspekt ihrer Verteilung betrachtet.

Als Grundlage dieser Überlegungen dienen analytisch beschriebene Verteilungen, die in Abschnitt 3.1 gezeigt werden. Die Darstellung diskreter Stichprobenwerte einer unbekanntem Verteilung wird in Abschnitt 3.2 gezeigt. In Abschnitt 3.3 wird die Methode beschrieben und bewertet mit der gleichverteilte zufällige Ereignisse generiert werden. Mit diesen können Zufallswerte, die als Stichprobenwerte einer bestimmten Grundverteilung dienen, bestimmt werden. Wie aus gleichverteilten Zufallswerten Zufallswerte einer nichtgleichverteilten Grundverteilung bestimmt werden, und welche Grundverteilung in dieser Arbeit verwendet wird ist in Abschnitt 3.4 gezeigt.

3.1 Analytische Verteilungsfunktionen

In dieser Arbeit werden drei Verteilungen häufig benutzt. Dies sind die Gleichverteilung, die Normalverteilung und die WEIBULLverteilung. Ihre wichtigsten Eigenschaften sollen hier kurz dargestellt werden.

3.1.1 Gleichverteilung

Wenn jeder Wert x einer stetigen Zufallsgröße X in einem Intervall $[x_u, x_o]$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird, spricht man von einer Gleichverteilung.

Die Dichtefunktion $f(x)$ ist hierbei konstant, wobei die Größe der Konstanten von der Breite des Intervalls, $x_o - x_u$, abhängt:

$$f(x) = \frac{1}{x_o - x_u} . \quad (3.1)$$

Die kumulative Verteilung, $F(x)$, für alle Werte $x_u \leq x \leq x_o$ ist in diesem Bereich eine Gerade

$$F(x) = \int_{x_u}^x f(x) dx = \frac{x - x_u}{x_o - x_u} , \quad (3.2)$$

wobei F für $x \leq x_u$ null und für $x \geq x_o$ eins ist.

Der Mittelwert, \bar{x} , ist dabei

$$\bar{x} = \int_{x_u}^{x_o} x f(x) dx = \frac{x_u + x_o}{2}. \quad (3.3)$$

Für die Varianz, φ^2 , gilt

$$\varphi^2 = \int_{x_u}^{x_o} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \quad (3.4)$$

$$= \int_{x_u}^{x_o} x^2 f(x) dx - 2\bar{x} \int_{x_u}^{x_o} x f(x) dx + \bar{x}^2 \int_{x_u}^{x_o} f(x) dx. \quad (3.5)$$

Wegen

$$\int_{x_u}^{x_o} f(x) dx = F(x_o) - F(x_u) = 1 \quad (3.6)$$

kann die Varianz auch mit

$$\varphi^2 = \int_{x_u}^{x_o} x^2 f(x) dx - \bar{x}^2 \quad (3.7)$$

geschrieben werden und ergibt für die Gleichverteilung, Gl. (3.1), $\varphi^2 = (x_o - x_u)^2/12$. Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz, φ .

3.1.2 Normalverteilung

Die Dichtefunktion einer Normalverteilung hat die allgemeine Form

$$f(x) = \frac{1}{\varphi\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\varphi} \right)^2 \right], \quad (3.8)$$

hierbei ist \bar{x} der Mittelwert und φ die Standardabweichung. Die Dichtefunktion ist symmetrisch um \bar{x} und nach oben und unten unbegrenzt, d. h. $x \in [-\infty, +\infty]$. Das Bild einer Normalverteilung ist die bekannte GAUSSsche Glockenkurve.

Ihre kumulative Verteilung ist für alle $x < \infty$ durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\varphi\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\varphi} \right)^2 \right] dx \quad (3.9)$$

gegeben.

Die Berechnung des Integrals kann durch die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (3.10)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\varphi\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\varphi} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \bar{x}}{\varphi\sqrt{2}} \right) \right) \quad (3.11)$$

geschrieben und leichter berechnet werden [1].

3.1.3 Weibull-Verteilung

Einfache Form

In der einfachsten Form lautet die WEIBULL-Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - e^{-\gamma x^p} \quad (3.12)$$

mit den Parametern $p > 0$ und $\gamma > 0$; sie geht durch den Nullpunkt. Ihre erste Ableitung, die Dichtefunktion, lautet

$$f(x) = \gamma p x^{p-1} e^{-\gamma x^p} \quad (3.13)$$

und deren Ableitung

$$f_{,x} = \gamma p x^{p-2} e^{-\gamma x^p} (p - 1 - \gamma p x^p) . \quad (3.14)$$

Für $p > 1$ wird Gl. (3.13) bei $x = 0$ zu null, womit sich die Verteilungsfunktion Gl. (3.12) im Nullpunkt asymptotisch an die x-Achse schmiegt, bei Werten von p nahe 1, $p = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, aber sehr schnell ansteigt, wenn x größer wird. Für $p = 1$ nimmt Gl. (3.13) bei $x = 0$ wegen $0^0 = 1$ den Wert γ an, bildet die Verteilungsfunktion also bereits im Nullpunkt einen Winkel zur x-Achse, und für $0 < p < 1$ schließlich beginnt die Verteilungsfunktion unendlich steil. Abbildungen 10.7 und 10.8 (Seite 138) zeigen den Verlauf der Verteilungsfunktion und ihren Ableitungen für Exponenten $p = 5$ und $p = 0.5$.

Von praktischer Bedeutung für Bruchstatistiken sind WEIBULL-Funktionen mit Exponenten $p \gg 1$. Für diese Werte beginnt die Verteilungsfunktion im Nullpunkt asymptotisch mit der x-Achse, steigt dann deutlich an, um schließlich wieder flacher asymptotisch gegen 1 zu streben. Nach oben ist der Definitionsbereich der Funktion unbegrenzt, d. h. $F(x) = 1$ für $x \rightarrow \infty$.

Besondere Punkte dieser Verteilungsfunktionen sind ihr Wendepunkt $\{x_w, F_w = F(x_w)\}$ und die Steigung am Wendepunkt $f_w = f(x_w)$. Leicht zu bestimmen ist außerdem der Schnittpunkt der Tangente durch den Wendepunkt mit der x-Achse, x_s .

Nullsetzen von Gl. (3.14) ergibt die x-Koordinate des Wendepunkts

$$x_w = \left(\frac{p-1}{\gamma p} \right)^{\frac{1}{p}} , \quad (3.15)$$

der für $p > 1$ positive Werte annimmt. Der Funktionswert am Wendepunkt berechnet sich dann zu

$$F_w = 1 - e^{-\frac{1-p}{p}} \quad (p > 1) . \quad (3.16)$$

Aus dem Funktionswert der Dichtefunktion, Gl. (3.13), an ihrem Maximum, $x = x_w$, ergibt sich die Steigung der Verteilungsfunktion an ihrem Wendepunkt

$$f_w = (p-1) \left(\frac{p-1}{\gamma p} \right)^{-\frac{1}{p}} e^{-\frac{1-p}{p}} , \quad (3.17)$$

womit sich mit

$$(x_w - x_s) \cdot f_w = F_w \quad (3.18)$$

der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse zu

$$x_s = \frac{p - e^{\frac{p}{1-p}}}{p-1} \left(\frac{p-1}{\gamma p} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.19)$$

ergibt.

Für größere p und γ wird die Kurve jeweils steiler, während sich die Höhe des Wendepunktes ausschließlich durch den Exponenten p bestimmt. Für $p \approx 3.259$ ist $F_w = 0.5$, größere p ergeben höher liegende Wendepunkte.

Dreiparametrische Form

Verschiebt man die WEIBULL-Funktion Gl. (3.12) um einen Betrag σ_u nach rechts, so erhält man eine 3-parametrische Form

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\vartheta} \right)^p \right), \quad (3.20)$$

die für alle $\sigma < \sigma_u$ zu null gesetzt wird. Ihre Bedeutung liegt in der Aussage, daß es keine Wahrscheinlichkeit von Werten kleiner σ_u gibt. Alle für die einfache Form gemachten Aussagen gelten weiter, wenn man $x = \sigma - \sigma_u$ setzt.

Damit wird der Wendepunkt $(\sigma_w, F_w = F(\sigma_w))$ zu

$$x_w = \vartheta \left(\frac{p-1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} + \sigma_u \quad (3.21)$$

$$F_w = 1 - \exp \left(\frac{1-p}{p} \right) \quad (p > 1), \quad (3.22)$$

die Steigung am Wendepunkt f_w zu

$$f_w = \left(\frac{p-1}{\vartheta} \right) \left(\frac{p-1}{p} \right)^{-\frac{1}{p}} \exp \left(\frac{1-p}{p} \right) \quad (3.23)$$

und der Schnittpunkt σ_s der Tangente mit der x-Achse zu

$$\sigma_s = \vartheta \frac{p - \exp \left(\frac{p}{1-p} \right)}{p-1} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} + \sigma_u. \quad (3.24)$$

Lineardarstellung der Weibull-Verteilung

Der Verlauf einer einfachen WEIBULL-Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp(-\gamma x^p) \quad (3.25)$$

kann als lineare Funktion durch mehrfache Logarithmierung dargestellt werden. Aus Gl. (3.25) ergibt sich

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(x)} = \ln \gamma + p \ln x. \quad (3.26)$$

Setzt man

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(x)} \quad (3.27)$$

$$X = \ln x \quad (3.28)$$

$$B = \ln \gamma \quad (3.29)$$

wird Gl. (3.26) zu

$$Y = B + pX. \quad (3.30)$$

Eine 3-parametrische WEIBULL-Verteilung

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\vartheta} \right)^p \right] \quad (3.31)$$

läßt sich zu

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(\sigma)} = p \ln(\sigma - \sigma_u) - m \ln \vartheta \quad (3.32)$$

umformen. Setzt man nun

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(\sigma)} \quad (3.33)$$

$$X = \ln(\sigma - \sigma_u) \quad (3.34)$$

$$B = -p \ln \vartheta \quad (3.35)$$

ergibt sich aus Gl. (3.32) wiederum

$$Y = B + pX. \quad (3.36)$$

Es ist deutlich zu sehen, daß im Fall der 2-parametrischen WEIBULL-Funktion p und B in Gl. (3.30) unabhängig wählbare Parameter sind, die in jedem Fall zu einer Geraden führen. Bei der 3-parametrischen WEIBULL-Verteilung hingegen ist dies nur dann der Fall, wenn X als primäre Variable verstanden wird, nicht aber, wenn die primäre Variable σ ist, da X nicht allein von σ abhängt. Die freien Parameter B und p von Gl. (3.36) sind also an die „richtige“ Wahl von σ_u in Gl. (3.31) gekoppelt, will man eine Geradendarstellung erreichen. Aufgrund des Summenausdrucks innerhalb des Logarithmus in X läßt sich σ_u auch nicht aus X so herausziehen, daß es nur noch mit den Bestimmungsparametern ϑ und p gekoppelt ist.

3.2 Darstellung diskreter stochastischer Ereignisse

Liegen I Stichprobenwerte x_i einer unabhängigen Zufallsvariablen X vor, läßt sich mit diesen Werten näherungsweise die kumulative Verteilungsfunktion $F(X)$ der Dichteverteilung $f(X)$ dieser Zufallsvariablen darstellen, auch wenn $f(X)$ und $F(X)$ nicht bekannt sind. Die kumulative Verteilung F kann, unabhängig von X , nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen und steigt monoton mit wachsendem X .

Ordnet man die Zufallszahlen x_i nach ihrer Größe, also so, daß $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_I$ gilt, und ordnet man jedem Wert eine wachsende Versagenswahrscheinlichkeit $F_i(x_i)$ zu, so daß also

$0 \leq F_1(x_1) \cdots \leq F_i(x_i) \cdots \leq F_I(x_I) \leq 1$ gilt, lassen sich diese Wertepaare, $\{x_i, F_i(x_i)\}$, graphisch darstellen.

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, einen adäquaten „Schätzer“ für diese kumulativen Wahrscheinlichkeiten zu finden. Im Rahmen dieser Arbeit wird dafür

$$F_i(x_i) = (i - 0.5)/I \quad (3.37)$$

verwendet.

Es muß allerdings angemerkt werden, daß durch dieses Verfahren keine Verteilungsfunktion bestimmt wird. Will man mit den Werten eine Verteilungsdichte ermitteln, muß die kumulative Verteilung abgeleitet werden, was aufgrund der diskreten Werte nur abschnittsweise geschehen könnte. Diese einzelnen Ableitungswerte streuen aber üblicherweise zu sehr, als daß man damit eine Vorstellung der Dichteverteilung erhält. Zu einer Bestimmung der Dichtefunktion müßte eine Ausgleichsfunktion bestimmt werden. Da dies im Rahmen dieser Arbeit aber nicht benötigt wird, wird hier davon abgesehen, die mögliche Verfahrensweise aufzuzeigen.

3.3 Gleichverteilte Zufallszahlen

Im Rahmen dieser Arbeit ist es notwendig, Werte zu erzeugen, die einer bestimmten Grundverteilung entsprechen. Dies wird in zwei aufeinander abgestimmten Schritten erreicht. In einem ersten Schritt werden gleichverteilte Pseudozufallszahlenreihen im Bereich $r \in [0, 1]$ erzeugt. In einem zweiten Schritt werden dann aus diesen mittels einer geeigneten Vorschrift die eigentlichen Werte der gewünschten Verteilung generiert. Die Schnittstelle zwischen den beiden Schritten wird als binär beschriebene Datei realisiert. Die binäre Form sorgt dafür, daß keine Dezimalstellen verlorengehen und die Dateiform sorgt für Transparenz zu Testzwecken.

Für die Generierung von stochastisch sauberen Reihen ist es essentiell, daß die zugrundeliegenden Randomzahlen

1. zufällig erscheinen und sich nicht ab einer gewissen Anzahl von Aufrufen als periodisch erweisen, und
2. bei beliebiger Menge N im Mittel tatsächlich gleichverteilt generiert werden.

3.3.1 Erzeugung von Zufallszahlen

Mittels der im UNIX-System verfügbaren Bibliotheksfunktion `double drand48(void)` wird eine Pseudozufallszahl zwischen null und eins erzeugt, wobei bei aufeinanderfolgenden Aufrufen der Funktion die erzeugte Reihe von Werten den beiden zuvor angegebenen Kriterien genügt. Der zugrundeliegende Mechanismus wird als *linear kongruenter Rekursionsalgorithmus* bezeichnet. Ausgehend von einem beliebigen ersten langen Integer-Wert X_1 wird ein weiterer Integerwert nach der Vorschrift

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \pmod{m} \quad (3.38)$$

berechnet (Vgl. auch [33]). Für die Konstanten a , c und m werden nach [25] die Werte $a = 5dceece66d_{16}$, $c = b_{16}$ und $m = 2^{48}$ benutzt. $x \pmod{y}$ bezeichnet den Integerrest bei Division von x durch y . Die Basis 16 zeigt, daß die Konstanten in hexadezimaler Form angegeben sind. Der zuletzt erzeugte Wert X_{n+1} wird prozeßintern zu einer eventuellen Bestimmung

von X_{n+2} als 48-Bit-Integerzahl gespeichert, ohne daß der Nutzer sich darum zu kümmern braucht.

Um aus dieser langen Ganzzahl zu einem Gleitkommawert zwischen null und eins zu gelangen, werden die – ggf. höchstwertigen – Bit der erzeugten neuen Zahl X_{n+1} an die Stelle der Mantisse des zu erzeugenden Randomwerts umgespeichert. Bei Gleitkommazahlen im allgemein üblichen IEEE-Format besitzt die Mantisse 52 Bit, so daß weitere Stellen zu besetzen sind. Darüber sind in [25] keine Angaben gemacht.

Vor der Erzeugung einer neuen Reihe von Randomwerten muß der Startwert X_1 von Gl. (3.38) generiert werden. Hierzu gibt es die UNIX-Funktion `void srand48(long seedval)`. Dieser Funktion wird der vom Nutzer vorzugebende lange Integerwert `seedval` übergeben. Die 32 Bit dieser Zahl werden an die Stellen der höchstwertigen Bit von X_1 kopiert und die 16 niederwertigeren Bit von X_1 werden mit der Konstante $33_{16}0e_{16}16_{16}$ aufgefüllt.

3.3.2 Reproduzierbarkeit

Aus dem vorgestellten Algorithmus zur Erzeugung von Randomzahlen wird deutlich, daß bei mehrfacher Benutzung des gleichen Werts für die Variable `seedval` zur Initialisierung jeweils identische Reihen von Werten generiert werden. Diese Erkenntnis führt zu einer nützlichen Anwendung, muß aber andererseits beachtet werden, will man Serien von unterschiedlichen Randomfolgen erzeugen.

Es ist sinnvoll, die einer Modellrechnung zugrundegelegten Werte einer Grundverteilung zu speichern. Einerseits können dann zusätzliche Tests durchgeführt werden, andererseits brauchen nicht alle Daten eines Rechenlaufs aufbewahrt zu werden, wenn die Rechnung mit den gleichen Werten gegebenenfalls wiederholt werden kann. Angesichts der Technik der Generierung von Randomzahlen genügt es aber, den Wert zur Initialisierung der Randomreihe zu speichern, um jederzeit die Folge von Randomzahlen reproduzieren zu können, womit auch die diskreten Werte der gewählten Grundverteilung reproduzierbar sind, wenn nur die Erzeugungsvorschrift noch bekannt ist. Angesichts der hohen Zahl von Zufallswerten pro Modellprobe, ergibt sich hieraus der Vorteil, daß für jede Modellprobe nur der Samenwert der Randomreihe zu speichern ist.

Werden mehrere Modellproben für eine Probenserie generiert, wäre es unsinnig, würden diese die gleichen diskreten Werte besitzen. Nach der oben gezeigten Rekursionsvorschrift für die Generierung der Randomzahlen sind die einzelnen Folgen aber auch dann voneinander verschieden, wenn nur darauf geachtet wird, daß nicht mehrmals der gleiche Initialisierungssamen verwandt wird. Die Prüfung nach der Bestimmung eines Initialisierungssamens, ob dieser bereits irgendwann früher im Verlauf der Erzeugung einer Serie von Modellproben benutzt wurde, ist numerisch leicht möglich.

Bei der Berechnung einer Serie von Modellproben im Zusammenhang mit dieser Arbeit wird üblicherweise ein *shell*-Skript verwendet, das den Ablauf nach folgendem Prinzip steuert:

- erste Probe
 - generiere Samen
 - generiere Zufallsreihe
 - generiere diskrete Grenzwerte der Probe
 - berechne Modellprobe

- nächste Probe
- generiere Same
- ... usw. ...

Der Same wird hierbei seinerseits generiert. Zur Sicherstellung, daß die Modellproben unterschiedlich generiert werden, braucht somit nur eine Datei mit den generierten Samen erstellt zu werden – was bereits aus Dokumentationsgründen erfolgt –, und nach der Erzeugung eines neuen Samen in dieser Datei gesucht zu werden, ob der Wert bereits vorkommt. In dem Fall kann er verworfen und durch einen neu generierten ersetzt werden.

3.3.3 Generierung der Samenwerte

Die Automatische Erzeugung der Samen wurde dadurch randomisiert, daß die Datumsfunktion `date` des Betriebssystems abgefragt wird und aus den Sekunden, Minuten und Stunden der zurückgegebenen Aktualzeit ein ganzzahliger Wert aus maximal 10 Dezimalziffern generiert wird, wobei die erste kleiner als 2 sein muß. Dies ist die maximal zulässige Größe für eine lange Ganzzahl. (Genau: $2^{84}/2 = 2.147.493.648$ bei 32 Bit.) Die verwendeten Verfahren variierten hierbei im Lauf der Zeit, wobei eine Variante hier kurz vorgestellt wird.

Die Sekunden, Minuten und Stunden der aktuellen Zeit werden jeweils in Prozent umgerechnet (z.B. $\text{min}/0.60$) und der gebrochene Anteil wird abgeschnitten, so daß jeder der drei Werte kleiner als 100 ist und maximal 2 Dezimalziffern belegt. Eine weitere, maximal 3-ziffrige Dezimalzahl wird dadurch erzeugt, daß die laufende Nummer des Rechenlaufs (bei Serien) multiplikatorisch mit einer oder mehreren der anderen Werte verknüpft wird. Diese ≤ 9 Ziffern werden als Zeichenketten aneinandergehängt. Eine Verdopplung und Addition von 1 ergab in jedem Fall eine ungerade Zahl, und ihr Ergebnis ist maximal 10-stellig und besitzt bei zehn Stellen eine 1 als erste Ziffer. Eine so erzeugte Samenreihe ist: 63511177, 1915116251, 1875136265, 3514737, 1235160231, 915172209, 915192217, 9758731, 3582127, 131582339.

Diese Vorschrift stellt einerseits eine genügend große Zahl sicher, um Wiederholungen zu erschweren und einen möglichst großen Zahlenraum abzudecken, stellt aber auch sicher, daß die Zahl klein genug bleibt, um einen Speicherfehler bei der Übergabe an das Programm zu verhindern. Durch Voranstellung der Sekundenwerte bei der Aneinanderreihung wird eine starke Variation der Samen auch bei kurzen Rechenläufen erreicht. (Die zusätzlich gebildete Zahl unter Verwendung der Nummer des Rechenlaufs erwies sich als notwendig, wenn Rechenläufe mit dem Bündelketten-Modell durchgeführt werden, da hier teilweise mehrere Modellrechnungen innerhalb einer Sekunde durchgeführt werden können.) Andererseits hat diese Generierungsvorschrift aber den Nachteil, daß kein kontinuierlicher Zahlenraum abgedeckt wird. Werden beispielsweise die Minutenwerte in Prozentwerte unter Vernachlässigung der Nachkommastellen verwendet, so fehlen immer die Ziffern 2, 4, 7 und 9 in dieser Reihe!

3.4 Grundverteilungen

In dieser Arbeit werden für das Probenmaterial lokale, statistisch streuende Grenzbelastungen als Maximalspannungen angenommen, welche Versagenskriterien auf mesostruktureller Ebene darstellen. Diese Grenzfestigkeiten werden als Stichprobe einer Verteilung entnommen, deren

Verteilungsfunktion als nach unten begrenzte WEIBULL-Verteilung

$$P(\sigma) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma - a}{c}\right)^p\right) \quad (3.39)$$

angenommen wird. Hierbei ist die untere Grenze $\sigma = a$ die Spannung, bei der im Experiment die ersten Mikrorisse auftreten. Die Parameter p und c bestimmen die Verteilungen der Bruchspannungen der Proben in Abhängigkeit von der äußeren Belastung und die Mikrorisse innerhalb der Probe. Durch verschiedene Werte dieser Parameter läßt sich also ein breites Spektrum möglichen Probenverhaltens darstellen. Im Prinzip lassen sich also p und c durch Vergleich mit dem experimentell ermittelten Verhalten bestimmen.

3.4.1 Erzeugung zufälliger Stichprobenwerte

Die Erzeugung der lokalen Bruchspannungswerte erfolgt durch Projektion der gleichverteilten Versagenswahrscheinlichkeitswerte $P \in [0, 1]$ auf die zu verwendende Verteilungsfunktion $P(\sigma)$, d. h. stochastisch erzeugte Einzelereignisse im Bereich $x \in [0, 1]$ liefern als Funktionswert einen Wert der Umkehrfunktion der kumulativen Verteilungsfunktion. Die gleichverteilten Zufallswerte, die die Versagenswahrscheinlichkeitswerte P repräsentieren, werden zuvor pseudozufällig erzeugt, wie es in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde,

Die generierten Zufallszahlen $r \in [0, 1]$ entsprechen den kumulativen Wahrscheinlichkeiten $P(\sigma)$ aus Gl. (3.39). Zur Erzeugung der zugehörigen Grenzspannungen σ wird die Umkehrfunktion $P^{-1}(\sigma) = \sigma = a + c(-\ln(1 - r))^d$ gebildet, wobei $d = 1/p$ ist. Da die WEIBULL-Funktion nach oben keiner Beschränkung unterliegt, also $P(\infty) < 1$ ist, liefert die Umkehrfunktion für Zufallswerte, die nur wenig kleiner als eins sind, praktisch unbeschränkt hohe Werte. Es ist deshalb sinnvoll, einen beliebigen, willkürlichen Grenzwert $1 - \varepsilon$ festzulegen, oberhalb dessen allen Wahrscheinlichkeiten ein endlicher fester Wert zugeordnet wird. Die lokalen Festigkeiten lassen sich dann durch

$$\sigma = \begin{cases} a + c(-\ln(1 - r))^d & r < 1 - \varepsilon \\ a + c(-\ln \varepsilon)^d & r \geq 1 - \varepsilon, \end{cases} \quad (3.40)$$

erzeugen, wobei $r \in [0, 1]$ die gleichverteilten Zufallszahlen sind und $\varepsilon \ll 1$ gewählt werden kann.

Da normalerweise das Versagen eines nur geringen Prozentsatzes von schwächsten Elementen den makroskopischen Bruch hervorruft, ist es ausreichend, wenn nur die schwächsten Elemente der WEIBULL-Verteilung Gl. (3.39) gehorchen, die restlichen Elemente aber eine beliebige höhere Grenzfestigkeit aufweisen.

Man kann also die WEIBULL-Funktion um die untere Grenze entwickeln und die Exponentialfunktion durch ihren linearen Teil annähern. Mit

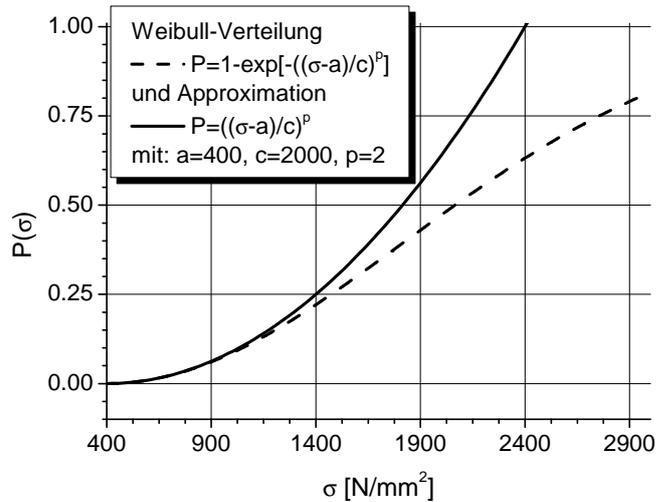
$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \approx 1 + z \quad (3.41)$$

kann die WEIBULL-Funktion, Gl. (3.39), durch die Funktion

$$P(\sigma) \approx \left(\frac{\sigma - a}{c}\right)^p \quad (3.42)$$

angenähert ersetzt werden. Für kleine Spannungen stimmt diese Approximation sehr gut mit der WEIBULL-Funktion überein (siehe Abbildung 3.1).

Abbildung 3.1: Vergleich WEIBULL-Funktion und Approximation



Die Vorschrift zur Erzeugung der diskreten Einzelbruchspannungen wird damit zu

$$\sigma_i = a + c \cdot r_i^d \quad (3.43)$$

vereinfacht. Hierbei sind die $r_i \in [0, 1]$ wiederum die statistisch gleichverteilten Zufallszahlen aus Abschnitt 3.3 und a und $a + c$ sind die untere und obere Grenze für die Festigkeiten. Der Parameter d ist wiederum $d = 1/p$. Zur Normierung der Bruchspannungen auf die untere Grenzspannung, a , wird in Gl. (3.43) die Konstante a herausgezogen, so daß sich die Verteilungsvorschrift

$$\sigma_i = a \left(1 + \frac{c}{a} \cdot r_i^d\right) = a (1 + \zeta \cdot r_i^d) \quad (3.44)$$

schreiben läßt. $\zeta > 0$ ist dann ein Maß für die Breite der Verteilung der normierten Festigkeiten, σ/a .

Kapitel 4

Statistische Versagensmodelle

4.1 Fasermodelle

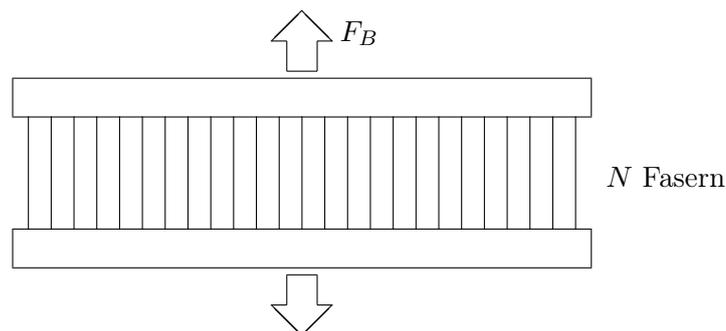
4.1.1 Klassisches Bündel

Werden N Fasern oder Pendelstäbe gleicher Länge, gleichen Querschnitts und gleicher Materialeigenschaften wie in Abbildung 4.1 skizziert gleichmäßig gezogen, stellt sich ein Bündelgleichgewicht bei $F_B = \sigma_f A_f N$ ein, wobei σ_f die Faserspannungen und A_f die Faserquerschnitte sind; F_B ist die resultierende Bündelkraft. Brechen jetzt infolge mikroskopischer Unregelmäßigkeiten nacheinander N_b Fasern, so stellt sich solange ein Bündelgleichgewicht

$$F_B = \sigma_f A_f (N - N_b) \quad (4.1)$$

ein, bis alle Fasern oder Stäbe zerstört sind und die beiden Bündelteile kinematisch werden. Die Bündelzugkraft durchläuft dabei ein Maximum bei F_B^t , welches die Bündelfestigkeit genannt wird, bevor sie bei $N_b = N$ wieder auf $F_B = 0$ zurückfällt.

Abbildung 4.1: klassisches Bündel



Entsprechen die Spannungen, bei denen die einzelnen Fasern des Bündels reißen, einer Verteilung deren Dichte mit $p(\sigma_f)$ gegeben ist, dann ist bei einer Faserspannung σ_f^ξ ein Anteil von

$$P(\sigma_f^\xi) = \int_0^{\sigma_f^\xi} p(\sigma_f) d\sigma_f \quad (4.2)$$

der Fasern gerissen. Damit läßt sich für jeden Faserspannungszustand $0 \leq \sigma_f \leq \sigma_f^{\max} = P^{-1}(1)$ die Bündelkraft aus Gl. (4.1)

$$F_B = \sigma_f A_f N (1 - P(\sigma_f)) \quad (4.3)$$

schreiben und die maximale Bündelkraft, F_B^t , ergibt sich dann, wenn $\sigma_f = \sigma_f^t$ die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_f^t} [\sigma_f^t (1 - P(\sigma_f^t))] = 0 \quad (4.4)$$

erfüllt.

Für große Bündel, bei denen die Eigenschaften der Fasern als in Übereinstimmung mit ihren Erwartungen betrachtet werden können, wurde 1944 von H. E. Daniels in [19] gezeigt, daß die Verteilungsfunktion der Bündelbruchlasten durch eine Normalverteilung mit der Dichtefunktion

$$\omega(F_B) = \frac{1}{\phi_B \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{F_B - \bar{F}_B}{\phi_B} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

beschrieben werden kann. Der Mittelwert der Bündelkraft ist dabei der Funktionswert am Scheitelpunkt

$$\bar{F}_B = \sigma_f^t A_f N [1 - P(\sigma_f^t)] = F_B(\sigma_f^t) \quad (4.6)$$

und die zugehörige Standardabweichung ist nach [19] durch

$$\phi_B = \sigma_f^t A_f N \sqrt{\frac{P(\sigma_f^t) [1 - P(\sigma_f^t)]}{N}} \quad (4.7)$$

gegeben. Die kumulative Verteilung der Bündelmaximallasten ergibt sich dann zu

$$\Omega(F_B) = \int_{-\infty}^{F_B} \omega(F_B) dF_B. \quad (4.8)$$

Wird das Bündel verschiebungsgesteuert gezogen, d. h. die Bündeldehnung wird beim Reiß einer Faser konstant gehalten, kann das Bündel auch nach Erreichen der Bündelmaximallast bis zum Reiß der letzten noch ungerissenen Faser weiter gedehnt werden, wobei wegen des Kraftgleichgewichts die Bündelzugkraft wieder abnimmt. Hält man hingegen die Bündelkraft beim Reiß einer Faser konstant, und nimmt somit Sprünge in der Bündeldehnung beim Reiß von Fasern in Kauf, reißt das Bündel bei Erreichen der maximalen Bündelkraft kaskadenartig durch, wie es bei Daniels beschrieben ist. Diese Bündelmaximalkraft wird deshalb auch als Bündelbruchlast bezeichnet.

Um zu einer etwas handlicheren Formulierung zu kommen, werden nun die Kraftausdrücke in den Formeln (4.5)–(4.8) durch Spannungsausdrücke ersetzt, womit sich Vergleiche verschieden großer Bündel direkt angeben lassen.

Die Bündelspannung wird nun definiert, indem die Bündelfläche als N -facher Faserquerschnitt angesehen wird, also

$$\sigma_B = F_B / (A_f N) = \sigma_f (1 - P(\sigma_f)). \quad (4.9)$$

Damit ergibt sich die Dichteverteilung der Bündelfestigkeiten, Gl. (4.5), zu

$$\omega(\sigma_B) = \frac{1}{\varphi_B \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_B - \bar{\sigma}_B}{\varphi_B} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

mit der mittleren Bündelspannung

$$\bar{\sigma}_B = \bar{F}_B / (A_f N) = \sigma_f^t [1 - P(\sigma_f^t)] . \quad (4.11)$$

Die zugehörige Standardabweichung φ_B ergibt sich aus der Forderung, daß die kumulativen Verteilungen gleich sein müssen, $\Omega(\sigma_B) = \Omega(F_B)$,

$$\int_{-\infty}^{\sigma_B} \omega(\sigma_B) d\sigma_B = \int_{-\infty}^{F_B} \omega(F_B) dF_B, \quad (4.12)$$

zu

$$\varphi_B = \sigma_f^t \sqrt{\frac{P(\sigma_f^t) [1 - P(\sigma_f^t)]}{N}} . \quad (4.13)$$

Die kumulative Verteilung der Bündelspannungen, $\Omega(\sigma_B)$, ergibt sich damit zu

$$\Omega(\sigma_B) = \int_{-\infty}^{\sigma_B} \frac{1}{\varphi_B \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\sigma_B - \bar{\sigma}_B)^2}{2 \varphi_B^2} \right] d\sigma_B, \quad (4.14)$$

die sich unter Anwendung von Gl. (3.10) bzw. Gl. (3.11)

$$\Omega(\sigma_B) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma_B - \bar{\sigma}_B}{\varphi_B \sqrt{2}} \right) \right) \quad (4.15)$$

schreiben läßt.

Kleine Bündel

Die Verteilung der Bruchlasten des Bündels, wie sie von Daniels angegeben wird, ist eine asymptotische Lösung für Bündel mit unendlich vielen Fasern. Für sehr kleine Bündel ($N \leq 6$) geben Harlow und Phoenix exakte Lösungen für $\Omega(\sigma_B)$ in [38] an. Für größere N mit $N < \infty$ hat die exakte Lösung allerdings 2^{N-1} Terme [38], wodurch die Berechnung der Verteilungsfunktion mit wachsender Faseranzahl immer aufwendiger wird. Ab wievielen Fasern die Lösung hinreichend genau durch die asymptotische Lösung wiedergegeben wird, wagen sie nicht abzuschätzen, stellen aber fest, daß das Verhalten von Bündeln bei wachsender Faseranzahl nur sehr langsam gegen die asymptotische Lösung konvergiert.

Lastverteilungsregeln

Bei der bisher gezeigten Darstellung wird die Last, die das Bündel zu tragen hat, auf alle ungebrochenen Fasern gleichmäßig verteilt. Bei einem Bündel unabhängiger Fasern, die an einem Knotenpunkt gefesselt sind, mag diese Vostellung berechtigt sein, wenn man die Aufhängungspunkte unter der idealisierten Annahme betrachtet, daß diese unverdrehbar sind

und die Fasern exakt die gleiche Länge im unbelasteten Zustand und gleiche Ausdehnungskoeffizienten besitzen. In [51] wird dies als „demokratische Lastverteilung“ nach globalen Gesichtspunkten oder *globale Lastverteilung* (GLS – global load sharing) bezeichnet; Smith und Phoenix sprechen schlicht von *gleicher Lastverteilung* (ELS – equal load sharing) [73].

Harlow und Phoenix weisen aber darauf hin, daß es einer solchen Lastverteilungsvorschrift an Realitätsnähe mangelt und zur Modellierung von Kompositen deshalb ungeeignet ist [38]. Sie schlagen deshalb eine Bündellastverteilung vor, die die Fasern nicht gleichmäßig belastet und insbesondere Fasern, die die Rißfront bereits versagter Faserbereiche darstellen, höher belastet, als die restlichen Bündelfasern, die noch nicht gebrochen sind. Sie bezeichnen eine solche Lastverteilungsvorschrift als *lokale Lastverteilungsregel* (LLS). In diesem Fall ist das statistische Verhalten des Bündels wesentlich schlechter zu bestimmen, da auch die Anordnung der Fasern innerhalb des Bündels zu berücksichtigen ist. Tatsächlich ist das Problem, das Harlow und Phoenix das „major historical problem“ nennen [41], nach wie vor ungelöst.

Auch wenn das statistische Bruchlastverhalten theoretisch nicht gelöst wurde, so gibt es trotzdem Aussagen über das relative Verhalten der Bündel untereinander bei wachsender Bündelbreite. Harlow und Phoenix vertreten in [38] die Ansicht, daß das Bündelverhalten bei ungleicher Lastverteilung bei Bündelgrößen $N \geq 9$ bei wachsendem N ungefähr eine *weakest-link*-Skalierung Gl. (4.25) (siehe Abschnitt 4.1.2) zeigt. Ein solches Verhalten wird auch von Pfuß [57] und Curtin [18] für Bündel mit räumlich verteilten Fasern angegeben.

4.1.2 Einfache Kette

Bei einer Kette, Abbildung 4.2, bei der die äußere Kraft durch jeweils ein Kettenglied weitergeleitet wird, ist die maximale Zugkraft so groß wie ihr schwächstes Glied tragen kann. Sind die Kettengliedbelastbarkeiten statistisch verteilt und ist deren Bruchwahrscheinlichkeit durch die Dichtefunktion $p(\sigma)$ gegeben, führt die Bestimmung der Kettenbelastbarkeit zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Kleinstwertes der Stichprobe.

Eine gute Zusammenfassung der Zusammenhänge zwischen einer gegebenen Grundverteilung und ihrer Extremwertverteilung für verschiedene Verteilungsfunktionen findet sich bei B. Epstein in [29]. Hier sollen nur die für diese Arbeit relevanten Beziehungen kurz wiedergegeben werden.

Ist die Dichtefunktion der Grundverteilung der Kettengliedfestigkeiten mit $p(\sigma)$ gegeben, ist die Wahrscheinlichkeit eines Kettenglieds bei der Spannung σ_t noch zu überleben durch

$$1 - P(\sigma_t) = 1 - \int_{-\infty}^{\sigma_t} p(\sigma) d\sigma \quad (4.16)$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeit für das Überleben der ganzen Kette bestehend aus M Gliedern wird damit durch die Verteilung der Kleinstwerte von M Werte umfassenden Stichproben beschrieben, d. h.

$$1 - G_M(\sigma) = (1 - P(\sigma))^M; \quad (4.17)$$

die Kettenbruchwahrscheinlichkeit ist damit

$$G_M(\sigma) = 1 - (1 - P(\sigma))^M, \quad (4.18)$$

und ihre Verteilungsdichte ergibt sich durch Ableitung nach σ zu

$$g_M(\sigma) = Mp(\sigma)(1 - P(\sigma))^{M-1}. \quad (4.19)$$

Der Mittelwert der Kettenbruchfestigkeit, $\bar{\sigma}_M$, ergibt sich mit

$$\bar{\sigma}_M = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma g_M(\sigma) d\sigma \quad (4.20)$$

zu

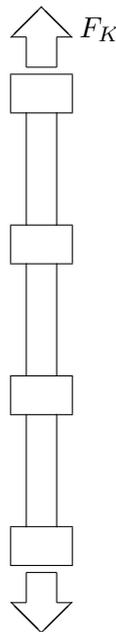
$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_M &= \sigma G_M(\sigma) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - P(\sigma))^M d\sigma \\ &= -\sigma (1 - P(\sigma))^M \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - P(\sigma))^M d\sigma, \end{aligned} \quad (4.21)$$

und wenn $p(\sigma)$ begrenzt, also $P(\sigma_u)=0$ und $P(\sigma_o)=1$ ist, ergibt sich

$$\bar{\sigma}_M = \sigma_u + \int_{\sigma_u}^{\sigma_o} (1 - P(\sigma))^M d\sigma. \quad (4.22)$$

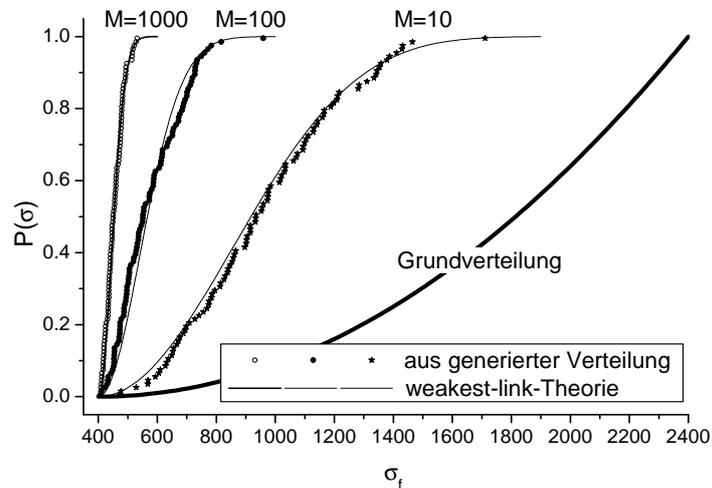
Es ist dabei leicht zu sehen, daß $(1 - P(\sigma))^M$ für große M immer schmäler wird und damit das Integral für $M \rightarrow \infty$ gegen null geht, so daß der Mittelwert der Bruchfestigkeit der Kette gegen den unteren Festigkeitswert der Kettengliedverteilung strebt.

Abbildung 4.2:
einfache Kette



M Glieder

Abbildung 4.3: Grundverteilung der Kettengliedfestigkeiten und Verteilung der resultierenden Kettenfestigkeiten für unterschiedliche Anzahl M von Kettengliedern



In Abbildung 4.3 ist dieser *weakest-link*-Effekt für drei Kettenlängen $M=10, 100$ und 1000 bei einer vorgegebenen Grundverteilung für die Kettengliedfestigkeiten dargestellt und in Tabelle 4.1 sind die Werte zusammengefaßt. Die Grundverteilung $P(\sigma)$ ist für dieses Beispiel mit

$$P(\sigma) = \left(\frac{\sigma - a}{c} \right)^2 \quad (4.23)$$

gewählt, wobei $a=400$ und $c=5a$ gesetzt wurde. Dargestellt sind die gegebene Grundverteilung (fette Linie), die theoretischen Kettenbruchwahrscheinlichkeitsfunktionen nach Gl. (4.18) für jede Wahl von M und die Ergebnisse aus je 100 generierten Ketten mit je M Werten für die

Kettenglieder (einzelne Punkte). Dieses Beispiel zeigt, daß der *weakest-link*-Effekt eine Skalierungsvorschrift ist, die eine recht gute Vorhersage der Spannungsverteilungen für verschiedene Kettenlängen M erlaubt. Allerdings scheinen bei kurzen Ketten die Randbereiche etwas zu sehr abgerundet (vgl.: $M=10$).

Tabelle 4.1: Modellketten für verschiedene M

$$\text{Verteilung der Faserbruchspannungen: } P(\sigma_f) = \left(\frac{\sigma_f - a}{c}\right)^p$$

Parameter für das Beispiel: $a=400$, $c=5a=2000$, $d=0.5$; $p=1/d$ ($A_f = 1$)

jeweils 100 Modellketten

Kettenlänge M		10	100	1000
max Kettenspannung	min von 100	475.97	408.41	406.38
	max von 100	1711.33	959.22	532.20
	MW	959.28	575.70	455.40
Standardabweichung		258.28	108.74	29.93

Eine numerische Auswertung von Gl. (4.22) ergibt die Mittelwerte $\bar{\sigma} = 940.52$ (für $M=10$), 576.58 (für $M=100$) und 456.03 (für $M=1000$), womit sich die Standardabweichungen

$$\varphi_K = \sqrt{\int_a^{a+c} \sigma^2 g_M(\sigma) d\sigma} - \bar{\sigma} = \sqrt{a^2 + \int_a^{a+c} 2\sigma \left(1 - \left(\frac{\sigma - a}{c}\right)^2\right)^M - \bar{\sigma}^2} \quad (4.24)$$

zu $\varphi_K = 267.35$ (für $M=10$), 91.77 (für $M=100$) und 29.28 (für $M=1000$) ergeben, die ebenfalls numerisch berechnet wurden. Auch hier zeigen sich für kürzere Ketten noch deutlichere Abweichungen zwischen den theoretischen und den versuchsweise ermittelten Werten.

Ist nur die Bruchwahrscheinlichkeitsverteilung einer Kette mit M Gliedern bekannt, so läßt sich durch mehrmalige Anwendung von Gl. (4.18) die Bruchwahrscheinlichkeit einer Kette mit kM Gliedern durch

$$(1 - G_M)^k = (1 - G_{kM}) \quad (4.25)$$

bestimmen, wobei k ein einfacher skalarer Multiplikator ist. Gl. (4.25) wird im Rahmen dieser Arbeit als „*weakest-link*-Skalierungsvorschrift“ bezeichnet.

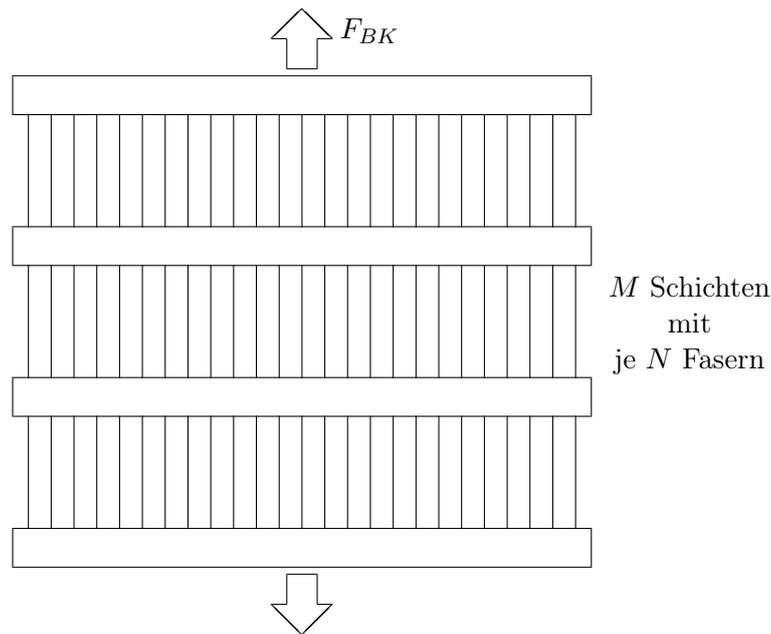
4.1.3 Bündelkette

Ein einfaches Modell, um das makroskopische Verhalten einer Zugprobe in Relation zu statistisch verteilten Einzelfestigkeiten setzen zu können, stellt das Bündelkettenmodell dar. Dieses Modell ist die Kombination aus einer Kette mit einzelnen Gliedern, die ihrerseits aus Bündeln bestehen. Die in Abbildung 4.4 dargestellten Querbalken sind dabei eigentlich punktförmige Knoten, an denen die einzelnen Bündel von Fasern fixiert sind.

Im Rahmen dieses Modells sind die stochastischen Eigenschaften der Mikrostruktur, die in Körnern und Korngrenzen angenommen werden, in die Fasern der Bündelkette abgebildet. Die Bündelkette entspricht dabei eher der flach gezeigten Struktur in Abbildung 4.4, wobei aber aufgrund der ursprünglichen Annahme von Knoten als Verbindungspunkten zwischen

den Bündelgliedern, die dargestellten Balken als unverdrehbar und bar eigener mechanischer Eigenschaften, also als undeformierbar und unbiegsam, behandelt werden. Aufgrund des spröden Bruchverhaltens des zu beschreibenden Probenmaterials und der damit einhergehenden geringen Verformung erscheint dies nicht als allzu große Einschränkung. Die Anzahl der Fasern und Schichten ist bei diesem Modell durch die mittlere Korngröße bestimmt oder genauer gesagt, durch die Länge und Lage der potentiellen arretierenden Mikrorisse.

Abbildung 4.4: Bündelkette



Das Bündelkettenmodell wird vielfach herangezogen, wenn ein Modell für den Einfluß statistisch verteilter Brucheigenschaften auf ein gekoppeltes Gesamtsystem benötigt wird. Hierfür werden besonders Faserverbundstoffe [58], lange Kabel [73] und spröde Komposite [61] benannt. Die Fasernlängen werden oft als „ineffektive Länge“, δ , [87] bezeichnet, wobei ihre Eigenschaften fluktuieren. Damit kann auch ihre Festigkeit über ihre Länge als variabel angesehen werden, so daß jede Faser für sich nach einem *weakest-link*-Mechanismus versagt [19]. Damit wiederum wird oft begründet, warum die Grundverteilung der streuenden Faserfestigkeiten einer WEIBULL-Verteilung entspricht [40, 52, 58].

In seinen Ausprägungen unterscheidet sich dieses Modell im wesentlichen durch die Behandlung der zugrundegelegten Bündel­eigenschaften, wobei die zwei grundsätzlichen Teilmodelle durch die Art der Lastverteilung unterschieden werden können. Das ältere Teilmodell beruht dabei auf der vereinfachenden Annahme gleichmäßiger Verteilung der Lasten auf alle ungerissenen Fasern. Die neueren Teilmodelle beruhen auf der Annahme lokal in Rißnähe konzentrierter Lastspitzen, wofür sich je nach Anwendung und Vereinfachungsgrad ein breites Spektrum an Lastverteilungsvorschriften ergibt.

Gleichmäßige Lastverteilung (ELS)

Das hier beschriebene Modell wurde Anfang der 60-er Jahre des letzten Jahrhunderts erstmals von B. W. Rosen in [58] beschrieben, um das Versagen einer faserverstärkten Matrix statistisch

zu untersuchen. Dabei wurden Abschnitte der verstärkenden Fasern in Bündeln zusammengefaßt und die sie umgebende Matrix bildete als Schubverband die einzelnen Grenzschichten zwischen diesen Bündeln. Es gelang ihm damit, die Behandlung des Problems auf zwei bereits untersuchte Prinzipien zurückzuführen und mit rein statistischen Mitteln zu beschreiben.

Bei diesem Modell sind die Bündelfestigkeiten σ_B (vgl. 4.1.1) die Festigkeiten der Kettenglieder, und die Verteilungsdichte der Kettengliedfestigkeiten ist durch die Verteilungsdichte der Bündelspannungen bei Bündelbruch, $\omega(\sigma_B)$ in Gl. (4.10) (Seite 35), bestimmt. Für eine Bündelkette mit M Bündelabschnitten ergibt sich damit für die Spannung des Gesamtsystems bei Bruch, $\sigma_C = F_{BK}/N$, eine Dichteverteilung

$$\lambda(\sigma_C) = \lambda_M(\sigma_B) = M\omega(\sigma_C)(1 - \Omega(\sigma_C))^{M-1}. \quad (4.26)$$

Die kumulative Verteilung der Bündelkettenbruchspannungen ergibt sich aus Integration von Gl. (4.26) über die Spannungen σ_C zu

$$\Lambda(\sigma_C) = \Lambda_M(\sigma_B) = 1 - (1 - \Omega(\sigma_C))^M. \quad (4.27)$$

An dieser Stelle ist die Erklärung von Rosen etwas irreführend, wenn er schreibt, daß σ_C die „average fibre stress at composite failure“ ist, da diese natürlich sehr viel größer ist, wenn in einem Bündel weniger als N Fasern überlebt haben und die gesamte Bündellast allein zu tragen haben. Bei N_r überlebenden Fasern in einem der Bündel ist die Faserspannung dann $\sigma_f = \sigma_B \cdot N/N_r$. Man müßte σ_C daher genauer als „mittlere Bündelspannung beim Systemversagen“ bezeichnen.

Die Verteilung der Bündelbruchlasten $\Omega(\sigma_B)$ ist eine Funktion von Faserspannung und Schädigung, $\Omega(\sigma_B) = \Omega(\sigma_f(1 - P(\sigma_f)) = \sigma_f(1 - b))$, wobei b die Schädigung $(N_b/N)_B$ des entsprechenden Bündels ist. Die Verteilungen der Bündelspannungen $\Omega(\sigma_B)$ war in Kapitel 4.1.1 nach Daniels [19] asymptotisch für große Bündel, $N \rightarrow \infty$, als normalverteilt mit ihren mittleren Bruchspannungen, $\bar{\sigma}_B$, und ihren Standardabweichungen, φ_B , beschrieben worden. Gl. (4.27) wird dann zu

$$\begin{aligned} \Lambda(\sigma_C) &= 1 - \left[1 - \int_{-\infty}^{\sigma_B} \frac{1}{\varphi_B \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_C - \bar{\sigma}_B}{\varphi_B}\right)^2\right) d\sigma_B \right]^M \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_C - \bar{\sigma}_B}{\varphi_B \sqrt{2}}\right) \right) \right]^M \end{aligned} \quad (4.28)$$

und die Dichteverteilung Gl. (4.26) wird entsprechend zu

$$\lambda(\sigma_C) = M \frac{1}{\varphi_B \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_C - \bar{\sigma}_B}{\varphi_B}\right)^2\right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_C - \bar{\sigma}_B}{\varphi_B \sqrt{2}}\right) \right) \right]^{M-1}. \quad (4.29)$$

Als Ungereimtheit fällt allerdings auf, daß die Verteilungsfunktion $\omega(\sigma_B)$ eine Normalverteilung ist. Während die einzelnen Fasern aber eine definierte Mindestspannung haben müssen, bevor sie reißen, läßt die Normalverteilung, zwar mit geringen Wahrscheinlichkeiten, auch Bündelfestigkeiten zu, die geringer sind als die Mindestspannungen der Einzelfasern. Besonders bei einer analytischen Bestimmung von Mittelwert und Varianz für die Bündelkettenbruchspannungen

$$\bar{\sigma}_C = \int \sigma_C \lambda(\sigma_C) d\sigma_C \quad (4.30)$$

$$\varphi_C^2 = \int \sigma_C^2 \lambda(\sigma_C) d\sigma_C - \bar{\sigma}_C^2 \quad (4.31)$$

bereitet die Festlegung der Integrationsgrenzen erhebliches Kopfzerbrechen. In der Praxis mag dies allerdings unerheblich sein, da die Wahrscheinlichkeiten jenseits der Grenzen für die Faserspannungen recht nahe bei null liegen.

Numerische Berechnung des Bündelkettenmodells bei ELS

Wird den Fasern ein einheitlicher Querschnitt, A_f , eine einheitliche Länge im unbelasteten Zustand, l_0 , und ein einheitliches elastisches Materialverhalten zugeordnet, lassen sich die Grundbeziehungen für das Bündelgleichgewicht und das Materialgesetz als Beziehung zwischen Spannung und Dehnung

$$F = N_r f_f \quad (4.32)$$

und

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta l_f}{l_0} = \frac{f_f}{A_f E} = \frac{\sigma_f}{E} \quad (4.33)$$

schreiben. Hierbei ist f_f die Kraft $\sigma_f A_f$ einer einzelnen Faser und σ_f ist die Spannung einer Faser, wenn das ganze Bündel eine äußere Zugkraft F trägt, wobei N_r die Anzahl der restlichen, also ungerissenen, Fasern bezeichnet. E ist der Elastizitätsmodul der Fasern. ε_f ist die einachsige elastische Faserdehnung als Quotient der Verlängerung, Δl_f , einer Faser und ihrer ursprünglichen Länge.

Für ein einfaches Bündel ergibt sich aus den Gleichungen (4.32) und (4.33), daß die Verschiebung der Probenoberkante, u^o , bei gleichzeitigem Festhalten der unteren Probenbegrenzung identisch mit der Faserverlängerung ist, also

$$u^o = \Delta l = l_0 \varepsilon_f. \quad (4.34)$$

Bei der Kette aus M Bündeln ist die Verschiebung der Probenoberkante die Summe der Verlängerungen der einzelnen Schichten m

$$u^o = \sum_{m=1}^M \Delta l^m = l_0 \sum_{m=1}^M \varepsilon_f^m. \quad (4.35)$$

Die Gleichgewichtsbedingung, Gl. (4.32), gilt bei der Bündelkette in jeder Schicht und die Faserdehnung, ε_f , ist für alle Fasern einer Schicht gleich. Wegen der gleichmäßigen Kraftverteilung auf alle ungebrochenen Fasern eines Bündels brechen die Fasern innerhalb jedes Bündels in der Reihenfolge ihrer Einzelfestigkeiten.

Die Faserfestigkeiten werden als individuelle Endpunkte auf der elastischen Geraden einer universellen Spannungs-Dehnungsbeziehung angesehen. Beim erstmaligen Überschreiten des individuellen Spannungs- bzw. des zugehörigen Dehnungswerts trägt die Faser keine Kraft mehr. Die globale Last bzw. Randverschiebung wird in diskreten Laststeigerungsschritten aufgebracht, so daß diese individuellen Endpunkte nicht überschritten werden.

Zu Beginn der Rechnung werden die Fasern für jede Bündelschicht gesondert nach ihren Festigkeiten sortiert, so daß für die Grenzfestigkeiten der Fasern im Bündel m der Bündelkette $\sigma_1^m \leq \sigma_2^m \leq \dots \leq \sigma_N^m$ gilt. Mit einem Vektor, N_r^m , der die Anzahl der ungebrochenen Fasern für jedes Bündel enthält, kann die Kraft

$$F^m = N_r^m \sigma_i^m A_f \quad \text{mit } i = N - N_r^m + 1 \quad (4.36)$$

bestimmt werden, bei der die nächste Faser in Bündel m reißt. $F_{BK} = \min(F^m)$ gibt dann die nächste Laststufe an, bei der der Bruch einer weiteren Faser des Gesamtsystems erreicht wird.

Nach Aufbringen dieser Last sind die Dehnungen jeder Schicht und damit die Gesamtdehnung des Systems und die zugehörigen Spannungen jeder Faser bekannt. Alle Fasern, die ihre Grenztragfähigkeit erreicht haben, gelten nun als gerissen und tragen danach keine Last mehr.

Bei Verschiebungssteuerung, d. h. gleiche Systemverlängerung u^o vor und nach Bruch, ergibt sich die neue, geringere Bündelkettenkraft zu

$$F_{BK} = \frac{u^o}{\sum 1/N_r} \frac{A_f E}{l_0} \quad (4.37)$$

und bei Kraftsteuerung, d. h. gleiche Systemzugkraft, F_{BK} , vor und nach Bruch, ergibt sich die neue, sprunghaft ansteigende Verschiebung des oberen Systemrandes zu

$$u^o = \frac{l_0}{A_f E} F_{BK} \sum \frac{1}{N_r}, \quad (4.38)$$

wobei $\sum 1/N_r$ die Summe der Kehrwerte der ungerissenen Fasern aller Bündelschichten ist. Die Faserspannungen ergeben sich dann aus Gl. (4.32). Eine Übersicht der Zustandsänderungen beim Bruch von N_b Fasern ist in Tabelle 4.2 vergleichend für ein einfaches Bündel und eine Bündelschicht m einer Bündelkette für beide Steuerungsarten wiedergegeben.

In den Schichten, in denen keine Faserrisse aufgetreten sind, erfolgt bei beiden Steuerungsarten keine Belastungssteigerung der Fasern, während in den Schichten, in denen bei dieser Laststufe bereits Fasern gerissen sind, die verbliebenen Fasern höher belastet werden. Bei Kraftsteuerung wird dies unmittelbar klar, da die Bündelkraft konstant bleibt, wodurch sich nichts für die Fasern in Schichten ohne Rißfortschritt ändert und in den Schichten mit Rißfortschritt die Kraft auf weniger Fasern verteilt. Bei Verschiebungssteuerung findet ein Kraftabfall statt, wodurch in Schichten ohne Rißfortschritt jede der Fasern entlastet wird. In Schichten mit Rißfortschritt nimmt die zu tragende Kraft zwar auch ab, diese muß aber gleichzeitig von weniger Fasern getragen werden, was nur möglich ist, wenn die Dehnung zugunsten der übrigen Schichten vergrößert wird. Im Resultat erhalten die Fasern der Schichten mit Rißfortschritt eine höhere Last als vor dem Riß ihrer Bündelgenossen. Bei Faserbruch erfolgt also ein sprunghafter Anstieg der Faserbelastung in dem Bündel, in dem Fasern reißen, so daß Fasern über ihre Grenztragfähigkeit hinaus belastet werden, wodurch diese ihrerseits sofort versagen. Es muß also bei beiden Steuerungsarten geprüft werden, ob nach der Lastumverteilung infolge von Rissen in den betroffenen Schichten weitere Fasern ihre Festigkeitsgrenze erreicht oder überschritten haben. Man kann damit deutlich sehen, daß im Gegensatz zum reinen Bündel, in der Bündelkette auch bei Verschiebungssteuerung kaskadenartiges Rißwachstum einsetzen kann.

Erst wenn bei vorgegebener Laststufe keine neuen Faserrisse mehr entstehen, kann nach Gl. (4.36) und durch $\min(F^m)$ eine neue Laststufe bestimmt werden. Die Rechnung endet, wenn in einer Schicht alle Fasern gerissen sind.

Die maximal erreichte Systemzugkraft wird als Systembruchlast und die dabei erreichte Schädigung als Bruchschädigung definiert. Es kann gezeigt werden, daß die maximale Zugkraft bei Kraft- und Verschiebungssteuerung identisch ist, wobei es bei Verschiebungssteuerung in diesem Punkt noch nicht unbedingt zum Probenbruch kommen muß. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Systemzuglast bei Faserriß absinkt, wodurch Kaskaden neu entstehender Faserrisse vor dem kompletten Durchriß zum Stillstand kommen können. Die danach zum

Tabelle 4.2: Vergleich zwischen einfachem Bündel und Bündelkette bei gleicher Lastverteilung. Mit den Beziehungen aus Gl. (4.32) – (4.35) lassen sich die Zustandsveränderungen beim Bruch von N_b Fasern für Bündel und Bündelkette angeben und für die beiden Steuerungsarten miteinander vergleichen. Die Größen vor dem Bruch werden mit $\overset{v}{\bullet}$ und mit $\overset{n}{\bullet}$ die Größen nach dem Bruch überschrieben. Für die Bündelkette sind die Schichtbezeichnungen m weggelassen. Da angenommen wird, daß nur in Schicht m Fasern reißen, impliziert der Term $\overset{v}{N}_r$ die Anzahl der ungebrochenen Fasern vor dem Bruch in Schicht m . Die Summe $\sum_M^{\neq m} \frac{1}{N_r}$ ist die Summe der $1/N_r$ aller übrigen Schichten $\neq m$.

Bündel	Bündelkette
	u-Steuerung, $\overset{n}{u}^o = \overset{v}{u}^o$
	Schicht m :
$\overset{n}{F} = \overset{v}{F} (1 - \xi_B)$	$\overset{n}{F} = \overset{v}{F} (1 - \xi_C)$
$\overset{n}{f}_f = \overset{v}{f}_f$	$\overset{n}{f}_f = \overset{v}{f}_f (1 + \zeta_C)$
$\overset{n}{\varepsilon}_f = \overset{v}{\varepsilon}_f$	$\overset{n}{\varepsilon}_f = \overset{v}{\varepsilon}_f (1 + \zeta_C)$
$\xi_B = \frac{N_b}{\overset{v}{N}_r}$	$\xi_C = \frac{N_b}{\overset{v}{N}_r \left(1 + (\overset{v}{N}_r - N_b) \sum_M^{\neq m} \frac{1}{N_r} \right)}$
	$\zeta_C = \overset{v}{N}_r \sum_M^{\neq m} \frac{1}{N_r} \xi_C = \frac{N_b \sum_M^{\neq m} \frac{1}{N_r}}{1 + (\overset{v}{N}_r - N_b) \sum_M^{\neq m} \frac{1}{N_r}}$
	übrige Schichten ($\neq m$):
	$\overset{n}{f}_f = \overset{v}{f}_f (1 - \xi_C)$
	$\overset{n}{\varepsilon}_f = \overset{v}{\varepsilon}_f (1 - \xi_C)$
	F-Steuerung, $\overset{n}{F} = \overset{v}{F}$
$\overset{n}{f}_f = \overset{v}{f}_f (1 + \eta_B)$	$\overset{n}{f}_f = \overset{v}{f}_f (1 + \eta_C)$
$\overset{n}{\varepsilon}_f = \overset{v}{\varepsilon}_f (1 + \eta_B)$	$\overset{n}{\varepsilon}_f = \overset{v}{\varepsilon}_f (1 + \eta_C)$
$\overset{n}{u}^o = \overset{v}{u}^o (1 + \eta_B)$	$\overset{n}{u}^o = \overset{v}{u}^o (1 + \chi_C)$
$\eta_B = \frac{N_b}{\overset{v}{N}_r - N_b}$	$\eta_C = \eta_B$
	$\chi_C = \frac{N_b}{(\overset{v}{N}_r - N_b) \left(1 + \overset{v}{N}_r \sum_M^{\neq m} \frac{1}{N_r} \right)}$

endgültigen Probenbruch erforderliche Zugkraft kann aber höchstens wieder genauso groß werden, wie sie zuvor schon war, da sonst auch bei Kraftsteuerung der Riß zum Stillstand gekommen wäre und das Zugkraftmaximum höher läge.

Gleichheit der maximalen Zugkraft bedeutet aber nicht unbedingt, daß die Bruchschädigung bei beiden Steuerungsarten identisch sein muß. In dem Fall nämlich, in dem das Maximum der Zugkraft mehrmals auftritt, tritt kaskadenartiges Durchreißen bei Kraftsteuerung bereits beim

ersten Erreichen dieses Maximums ein, wohingegen der Durchriß bei Verschiebungssteuerung erst nach dem letzten Auftreten dieses Maximums erfolgen kann. In allen Fällen aber, in denen der Maximalwert der globalen Zugkraft nicht mehrfach auftritt, liefern beide Steuerungsarten gleiche Bruchspannungs- und Bruchschädigungsergebnisse.

Da die diskreten Faserbelastbarkeiten aus der Menge der reellen Zahlen generiert werden, ist ein mehrfaches Maximum mit identischer Maximalkraft sehr unwahrscheinlich. Tatsächlich konnte dieser Effekt nur mit speziell zu Testzwecken konstruierten Faserfestigkeiten beobachtet werden, aber in keinem Fall, bei dem die Faserfestigkeiten pseudozufällig generiert wurden.

Hier wird auf diese Unterscheidung deshalb besonders abgehoben, weil alle bisherigen Arbeiten zur Statistik des Bündel- bzw. Bündelkettenversagens auf der Voraussetzung beruhen, daß bei Faserbruch die Bündelspannung erhalten bleibt. Diese Vorgehensweise ist bei experimentellen Untersuchungen aber nicht die Regel, sondern diese werden üblicherweise verschiebungssteuert durchgeführt. Es war deshalb von Interesse, ob Berechnungen mit dem Bündelkettenmodell zu unterschiedlichen Resultaten führen, wenn für die Steuerung der Modellrechnungen die Steuerungsart gewechselt wird.

Spannungserhöhung vor Rißspitzen (LLS)

Im Kapitel über einfache Bündel (4.1.1) wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine gleichmäßige Verteilung der Bündelzugkraft auf alle ungerissenen Fasern zu einem Modell führt, das Rißspitzeneffekte, die aus der Nachbarschaft von gebrochenen Kornstrukturen eines heterogenen aber zusammenhängenden Kontinuums resultieren, nicht ausreichend berücksichtigt. Um diese Effekte ansatzweise nachbilden zu können, wurden deshalb vielfach Lastverteilungsregeln vorgeschlagen, durch die mittels expliziter Regeln eine stärkere Belastung der Fasern vor lokalen Rißspitzen erzwungen wird. Die am häufigsten vorgeschlagene „lokale“ Lastverteilungsregel ist die *nearest-neighbour*-Regel, bei der eine vollständige Umlagerung der bei einem Riß freiwerdenden Kräfte auf die unmittelbaren Nachbarfasern erfolgt, siehe z. B. Harlow und Phoenix [38]. Der Vorteil dieser Regel besteht darin, daß sie noch relativ einfach analytisch erfaßt werden kann und praktisch einen Grenzfall darstellt, bei dem die Rißspitzenfasern maximal belastet werden. Die Hauptschwierigkeit für die analytische Behandlung resultiert dabei vor allem aus der Tatsache, daß die Anordnung der Fasern innerhalb der Bündel nicht mehr ergebnisneutral vertauscht werden kann. (Um dabei wenigstens das zusätzliche Problem der Behandlung der Lastumverteilung gebrochener Randfasern zu umgehen, werden vielfach die Bündel als kreisförmig angeordnete Fasern behandelt, was zu periodischen Randbedingungen bei zweidimensional angeordneten Faserbündeln führt, siehe Curtin [18]. Diese Anordnung ist für die Übertragung auf kristalline Komposite endlicher Ausdehnung nicht geeignet.) Bei der numerischen Behandlung stichprobenartig gegebener Bündel und Bündelketten steht nicht die analytische Behandelbarkeit im Vordergrund, sondern vielmehr die Behandelbarkeit für beliebige Anordnungen und Rißlängen in Bezug auf die Lastsumme des Bündels. Von Wiesand-Valk wurde in [83] eine Umverteilung der Lasten gerissener Fasern phänomenologisch nach dem Prinzip von Spannungsintensitätsfaktoren in der Umgebung von Rissen für den Modus I vorgeschlagen. Diese werden in der vorliegenden Arbeit übernommen und im Folgenden kurz dargestellt.

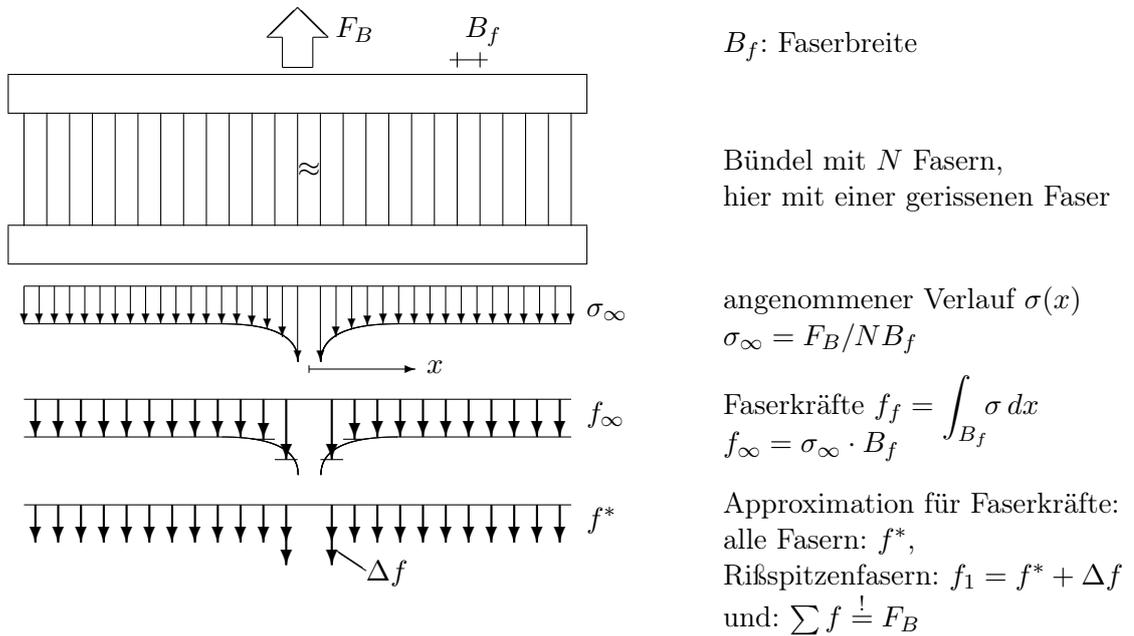
Um eine variable Berücksichtigung des Rißspitzeneffekts zu erreichen, wurde für die Lastverteilung ein Faktor, f_{Rf} , eingeführt, mit dem der Grad der Lastumverteilung variabel gehalten wird. Um die Kraftbilanz eines Bündels für variable Rißlängen und beliebig viele Einzelrisse zu erleichtern, wurde eine Superpositionsregel eingeführt, die die Summation eines Lastanteils

für die Rißspitzenfasern, Δf , und eines gleichmäßigen Anteils für alle ungebrochenen Fasern, f^* , vorsieht (Abbildung 4.5). Der Anteil für die Rißspitzenfasern

$$\Delta f = f_\infty \sqrt{m l_{\text{RiB}}} \cdot f_{Rf} \quad \text{mit } m = \begin{cases} 1 & \text{Innenriß} \\ 2 & \text{Randriß} \end{cases} \quad \text{und } f_{Rf} \geq 0 \quad (4.39)$$

wird hierbei nur den Fasern zugeteilt, welche unmittelbar an gerissene Fasern angrenzen, bei allen anderen Fasern ist dieser Anteil null. Fasern, die zu beiden Seiten an Mikrorisse angrenzen, erhalten konsequenterweise ihren Anteil aus beiden Rissen. Durch den Wurzelterm

Abbildung 4.5: *local load sharing*: Idealisierung und Vereinfachung des Rißspitzeneffekts



wird eine grobe Näherung der Lastverteilung erreicht, wie man sie bei der Rißspitzenöffnungsspannung eines GRIFFITH-Risses erwartet. Der Faktor m berücksichtigt den unterschiedlichen Einfluß der Rißlänge, l_{RiB} , auf diese Spannung, während durch den frei wählbaren Faktor f_{Rf} ein kontinuierlicher Übergang zur gleichmäßigen Lastverteilungsvorschrift ermöglicht wird. Der Vergleich mit einem GRIFFITH-Riß ergibt für f_{Rf} je nach Länge des Risses Werte zwischen 0.4 und 0.7 (vgl. [65]), während bei $f_{Rf} = 0$ die Vorschrift in die ELS-Regel übergeht. f_∞ ist die fiktive Faserkraft $\sigma_\infty B_f$, welche in einer Entfernung auftritt, bei der der laststeigernde Einfluß des Risses vollständig abgeklungen ist.

Der gleichmäßige Anteil für alle ungerissenen Fasern wird aus der Differenz bestimmt, die sich aus der zu verteilenden Zugkraft und dem Anteil ergibt, den die Rißspitzenfasern erhalten. Damit wird sichergestellt, daß die Summe der Kräfte in jeder Bündelschicht der globalen Zugkraft entspricht.

In Tabelle 4.3 ist der Einfluß verschiedener Lastverteilungsvorschriften auf die Faserbelastungen für einige Bündelgrößen unter der Annahme eines innenliegenden Einzelrisses gezeigt. Hierbei sind die Belastungen, die nach Gl. (4.39) auf die Rißnachbarn und die übrigen Fasern

entfallen, für verschiedene Werte des Rißspitzenfaktors f_{Rf} gezeigt. Die Werte bei *equal load sharing* entsprechen einem Faktor $f_{Rf} = 0$. Um einen Vergleich mit anderen Lastverteilungsmodellen zu ermöglichen, ist auch die Last angegeben, die bei voller Lastumlagerung auf die erste Nachbarfaser, „*nearest neighbour*-Regel“, entstände und die Last, die sich aus der Rißspitzenöffnungsspannung

$$\sigma = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \sigma_\infty \quad \text{für } x \geq a \quad (4.40)$$

für einen mittigen Riß in einer unendlich breiten Probe nach Griffith ergäbe. Hierbei ist a die halbe Rißlänge $N_b B_f/2$.

Tabelle 4.3: Lastanteile ungerissener Fasern beim Riß von N_b nebeneinanderliegenden Innenfasern in Bündeln unterschiedlicher Breiten N und Gesamtlasten F_{BK} bei verschiedenen Lastverteilungsvorschriften

F_{BK}		1 000			10 000			100 000		
N		10			100			1000		
N_b		1	2	3	1	2	3	1	3	5
f_{Rf}	LLS nach Gl. (4.39) für 1. Nachbarfaser, f_1 , und übrige Fasern, f^* , für verschiedene Rißspitzenfaktoren f_{Rf}									
0.5	f_1	150	178.0	204.7	150	171.3	187.9	150	186.7	212.1
	f^*	100	107.3	118.1	100	100.6	101.3	100	100.1	100.3
0.4	f_1	142.2	167.4	192.3	140.2	157.5	170.9	140.0	169.4	189.8
	f^*	102.2	110.9	123.1	100.2	100.9	101.6	100.0	100.2	100.3
0.3	f_1	134.4	156.8	180.0	130.4	143.6	154.0	130.0	152.2	167.4
	f^*	104.4	114.4	128.0	100.4	101.2	102.0	100.0	100.2	100.4
zum Vergleich: <i>equal load sharing</i>										
alle Fasern		111.1	125	142.9	101	102	103.1	100.1	100.3	100.5
volle Umlagerung auf 1. Nachbarfaser, f_1										
f_1		150	200	250	150	200	250	150	250	350
übrige Fasern		100	100	100	100	100	100	100	100	100
Rißspitzenöffnungsspannung für Mittenriß in unendlich breiter Probe nach Gl. (4.40) Spannung für 1. und 2. Nachbarfaser, f_1 und f_2 , jeweils über Faserbreite integriert										
f_1		141.4	173.2	200.0	141.4	173.2	200	141.4	200	244.9
f_2		103.5	109.6	116.2	103.5	109.6	116.2	103.5	116.2	129.2

Die explizit formulierte Verteilung der Last auf die einzelnen Fasern wird dadurch erkaufft, daß eine elastische Bündeldehnung analog Gl. (4.33) nicht mehr definiert werden kann. Eine verschiebungsgesteuerte Berechnung ist daher nicht möglich, so daß für dieses Teilmodell nur noch Kraftsteuerung implementiert wurde. Ein analytischer Ausdruck für die statistische Verteilung der Bündelspannungen, $\Omega(\sigma_C)$, kann nicht mehr angegeben werden, für die Bündelkette gilt allerdings nach wie vor der *weakest-link*-Mechanismus.

Berechnung des Bündelkettenmodells bei LLS

Wegen der lokalen Lastverteilungsregel ist ein Vorsortieren der Fasern in Bezug auf ihre Festigkeit nicht mehr sinnvoll, da auch schwächere Fasern überleben können, wenn sie infolge des Rißspitzeneffekts an anderer Stelle „geschützt“ sind. Auch bei der Laststeigerung, die rein elastisch erfolgt, muß die ungleiche Belastung der Fasern berücksichtigt werden. Zudem muß nach jedem neuen Faserriß die aktuelle Rißlänge berechnet werden, d. h. es muß bestimmt werden, welche gerissenen Fasern zusammen einen einzigen Riß bilden. Der Berechnungsaufwand für dieses Teilmodell ist deshalb deutlich höher als der bei gleichmäßiger Lastverteilung. Eine genaue Beschreibung der Rechenschritte für einen effektiven Algorithmus, insbesondere in Hinblick auf die Schrittgröße bei Belastungssteigerung, ist in [65] gegeben.

Die Berechnung des Bündelkettenmodells mit lokaler Lastverteilungsregel verläuft im übrigen ähnlich wie die bei gleicher Lastverteilung. Ausgehend vom unbelasteten Zustand wird eine Kraft aufgebracht, bei der die erste Faser reißt. Dann werden die Lastanteile, die die einzelnen Fasern zu tragen haben entsprechend der gewählten Lastverteilungsregel berechnet und mit ihren Festigkeiten verglichen. Reißen nun weitere Fasern infolge der neuen Lasten, so wird das Verfahren wiederholt. Erst wenn alle Fasern den ihnen zugemessenen Anteil der Last zu tragen vermögen, wird die äußere Last soweit erhöht, daß die nächste Faser reißt. Wegen der reinen Laststeuerung tritt das Problem mehrfacher Lastmaxima nicht auf und ein Abfall der globalen Kraft ist nicht möglich. Aus der Kraft, bei der das finale kaskadenartige Durchreißen einsetzt, und der zugehörigen Schädigung ergeben sich die Werte der Bruchfestigkeit und der Bruchschädigung.

Bewertung des Modells

Das Bündelkettenmodell ist als mikromechanisches Modell nur sehr eingeschränkt tauglich, da die durch Mikrorißbildung hervorgerufenen lokalen Spannungsfluktuationen sich nicht von selbst ergeben, sondern durch explizit vorgegebene Lastverteilungsregeln „hineingesteckt“ werden müssen. Die Stärke des Modells liegt vielmehr darin, daß es die stochastischen Mikroeienschaften mit dem globalen Probenverhalten auf einfache und effiziente Weise miteinander verknüpft. Es ist leicht implementierbar, sparsam in der Speichernutzung und ausgesprochen schnell, so daß der statistische Ansatz durch praktisch beliebig viele Modellrechnungen in fast unbegrenzter Modellgröße untersucht zu werden vermag.

Da keine gekoppelten Gleichungssysteme zu lösen sind, benötigten Rechnungen mit Systemgrößen von 1000 gekoppelten Bündeln mit je 1000 Fasern bei gleichmäßiger Lastverteilungsvorschrift nur etwa 3 Minuten pro Rechnung auf einer sun-workstation bis zum Durchbruch der Probe (durchschnittlich etwa 150 000 Lastinkremente je Rechnung).

Ein nicht zu behebender Nachteil des Modells ist allerdings, daß Rißverzweigungen nicht möglich sind und in seiner vorgestellten Form keine lokalen Entlastungen oberhalb und unterhalb der gerissenen Fasern stattfinden.

4.2 Finite-Elemente-Modelle

Um die Realitätsnähe der Ergebnisse des Bündelkettenmodells zu überprüfen, wurden Modelle auf der Basis der Finite-Elemente-Diskretisierungsmethode entwickelt. Bei diesen stellt sich eine mehrachsige Spannungsverteilung um entstandene Mikrorisse automatisch ein und die Lastverteilung muß nicht mittels einer „Regel“ vorgegeben werden.

Die Literatur gibt zu diesem Modellierungsansatz nur wenige Anhaltspunkte, da bei vergleichbaren lokalen Modellen für einachsige Zugbelastung [20, 54, 59, 72] die Unordnung i. a. zur Einführung einer rißinduzierenden Gefügeschwachstelle und Untersuchung des individuellen Systemverhaltens in deren Folge eingesetzt wird. Das kollektive Systemverhalten wird dabei unter dem Aspekt des qualitativ erzielten Probengrößeneffekts aufgrund einer einzelnen, zufällig bestimmten Konstellation betrachtet, und ein Vergleich findet eher gegenüber deterministischen Modellannahmen statt. Da in der vorliegenden Arbeit statistische Mittel zur Bestimmung der Korrelation zwischen stochastischer Ungeordnetheit und kollektivem Modellprobenverhalten untersucht werden soll, sind die dort vorgestellten Modelle zu aufwändig und daher zu rechenintensiv, so daß für diese Arbeit einfachere Modelle benötigt werden.

In einer ersten Realisierungsstufe wurde eine dem Bündelkettenmodell möglichst ähnliche Modellierung angestrebt, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu unterstützen, und um dann in der fortschreitenden Verfeinerung des Modells bei gleichzeitig zunehmender Entfernung vom Bündelkettenmodell immer mehr Aspekte, wie z. B. Rißablenkung und -verzweigung, miteinbeziehen zu können.

Das Durchbrechen des Restquerschnitts der in dieser Arbeit betrachteten Titanaluminide erfolgt plötzlich und vollständig. Hierbei sinkt nach Überschreiten des Lastmaximums die Tragfähigkeit sofort auf null, ohne daß vor der Trennung der Probehälften ein Bereich weiterer Dehnungen, die mit *post-peak*-Spannungen auf mindermem Niveau einhergehen, zu beobachten wäre, wie dies mitunter bei anderen Werkstoffen, z. B. Beton, der Fall ist (vgl. z. B. [21]). Das Versagen wird deshalb als Kaskade von Folgebrüchen angenommen, die nach Erreichen einer kritischen Schädigung einsetzt und sich durch innere Lastumlagerungen fortsetzt. Zur Modellierung dieses Verhaltens erfolgt das Elementversagen sprunghaft, wozu die äußere Lastinkrementierung angehalten wird, sobald die Probendehnung eine Größe erreicht hat, bei der Elemente brechen. Erst wenn dabei ein stabiler Zustand ohne Probenversagen eingetreten ist, wird die Probendehnung erhöht. Bei verfügbaren Finite-Elemente-Programmen ist es nicht möglich, dies aus dem Programm heraus zu steuern. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb ein eigener FE-Code entwickelt und implementiert.

4.2.1 Diskretisierung

Es werden zwei unterschiedliche Modelle, die sich im Wesentlichen in der jeweiligen Elementierung unterscheiden, zur Modellierung der Probenschädigung benutzt. In beiden Modellen wird die Probenmeßfläche auf ein ebenes Knotengitter abgebildet, durch welches ein Elementnetz aus elastischen isoparametrischen 4-Knoten-Kontinuums-Elementen aufgespannt wird. Die Steuerung der Belastung erfolgt verschiebungsgesteuert.

Im ersten Modell werden schichtweise angeordnete unzerstörbare Kontinuums-elemente durch Zwischenschichten aus bruchfähigen 2-Knoten-Kohäsivelementen zusammengehalten. Das zweite Modell besteht ausschließlich aus Kontinuums-elementen, die nach einer Phase elastischen Verhaltens versagen können. Zur sprachlichen Vereinfachung wird das erste Modell als „Kohäsivmodell“ und das zweite als „Kontinuumsmodell“ bezeichnet.

Das Material der Kontinuums-elemente wird, solange diese ungeschädigt sind, vereinfachend als ideal elastisch angenommen. Die zugehörigen elastischen Konstanten werden in Übereinstimmung mit den elastischen Konstanten von den zugrundeliegenden Titanaluminiden zu $E=180$ GPa und $\nu=0.3$ gesetzt [30]. Wegen der geringen Probendicke ist eine ebene Spannungsformulierung sinnvoll.

Da das spröde Materialverhalten vergleichsweise geringe Verformungen zeigt, wird vereinfachend mit kleinen Dehnungen und geometrischer Linearität gerechnet. Die Modellierung der Mikrorisse erfolgt ausschließlich für den Modus I mit Rissen senkrecht zur Zugrichtung unter Verwendung von makroskopischen Normalspannungskriterien für das Versagen. In dieser Arbeit ist die Zugrichtung immer die y -Richtung.

Entsprechend den experimentellen Randbedingungen werden in Zugrichtung nur die Knoten am unteren und oberen Rand gefesselt, wobei die Knoten am oberen Rand dem verschiebungsgesteuerten Versuchsablauf entsprechend gleichmäßig verschoben werden. Senkrecht zur Zugrichtung werden nur jeweils ein unterer und oberer Knoten in Probenmitte festgehalten, so daß sich die Querkontraktion frei einstellen kann. Bei den übrigen Knoten des Elementnetzes müssen sich die Verschiebungen von selbst so einstellen, daß die aus den Elementspannungen rührenden Knotenkräfte im Gleichgewicht bleiben. Die Summe der Reaktionskräfte aller Knoten mit vorbestimmter Lage, also von denen, die unverrückbar gehalten sind, und von denen mit vorgegebener Verschiebung, muß null sein, während hingegen allein die Summe der Kräfte der oberen Knoten die makroskopische Probenzugkraft repräsentiert.

Kohäsivmodell

Die Übertragung des Bündelkettenmodells wird durch eine Aufteilung in Schichten vorgenommen, wobei die vormals knotenförmig oder starr und ausdehnungslos angenommenen Schichtgrenzen nun unzerstörbare Körner des Kontinuums repräsentieren und durch Schichten ideal elastischer Kontinuumselemente ersetzt werden, so daß diese Schichten verformbar sind. Zwischen diesen Schichten werden Elemente angeordnet, die den Fasern des Bündelkettenmodells vergleichbare Eigenschaften aufweisen, also in erster Linie Träger der stochastisch generierten Festigkeitsgrenzen sind und individuell versagen können. Zu diesem Zweck werden 2-Knoten-Kohäsivelemente an den senkrecht zur Belastungsrichtung verlaufenden Schichtgrenzen angeordnet (vgl dazu Abbildung 4.7 auf Seite 59). Für jedes dieser Elemente wird eine individuelle Zugfestigkeit aus der Grundverteilung generiert. Bis zu dieser Festigkeit verhält es sich quasi-elastisch, nach deren Überschreiten aber verschwindet seine Tragfähigkeit.

Die Wahl von Kohäsivelementen anstatt elastischer Stäbe erfolgt aus der Überlegung, daß die Korngrenzflächen des realen Materials die versagenden Schichtgrenzen darstellen und in ihrer unbelasteten Form keine Ausdehnung besitzen. Analog dazu besitzen auch die Kohäsivelemente im unbelasteten Zustand – im Gegensatz zu elastischen Stäben – keine Ausdehnung. Das Prinzip der Kohäsivelemente, ihre Kraftübertragung und ihre Behandlung im Rahmen der Diskretisierungsmethode wird in Abschnitt 4.2.4 behandelt.

Durch die abwechselnde Anordnung von *ad infinitum* elastischen Kontinuumselementen und zerstörbaren Kohäsivelementen wird das Bündelkettenmodell mit der geringsten Zahl zusätzlicher Parameter diskretisiert, wobei nur ein neuer Aspekt hinzukommt, nämlich die Verformbarkeit der ehemaligen Grenzschichten, wodurch Entlastungseffekte unter- und oberhalb gerissener Fasern durch eine „natürliche“ Lastverteilung Berücksichtigung finden. Rißverzweigung ist weiterhin ausgeschlossen. Dadurch eignet sich dieses Modell nicht nur am besten zum direkten Vergleich mit dem Faserbündelmodell, sondern es ist numerisch auch am leichtesten beherrschbar, da keine aus Rißverzweigung entstehenden zusätzlichen Probleme (z.B. herausbrechenden Systemteile) zu berücksichtigen sind. Die Nachteile dieses Modells bestehen in der praktisch doppelt so großen Anzahl von Freiheitsgraden im Vergleich zum reinen Kontinuumsmodell ohne Kohäsivelemente und in der Beschränkung auf Proben konstanten Querschnitts. Die Beschränkung resultiert aus der in dieser Arbeit verwendeten Formulierung für die Kohäsivelemente und ist keine Eigenschaft von Kohäsivelementen per se; tatsächlich

ließe sich diese Formulierung auch für beliebige Probenquerschnitte modifizieren. Darauf wird in Abschnitt 4.2.4 kurz eingegangen.

Kontinuumsmodell

Eine Weiterentwicklung des Modells sollte dem realen Verhalten von Rissen Rechnung tragen und deshalb auch die Verzweigung von Rissen ermöglichen. Diese Forderung stellte sich besonders auch vor dem Hintergrund der Erfahrungen mit dem Schichtmodell. Wie nämlich im Abschnitt 4.2.8 gezeigt wird, tendiert das Schichtmodell zu einer physikalisch unrealistischen schichtweisen Delaminierung der Probe (vgl. Abbildung 10.16 auf Seite 143).

Eine Weiterentwicklung des Modells hätte darin bestehen können, zusätzliche *Interface*-Elemente, z. B. weitere Kohäsivelemente, quer zu den bisher bereits bruchfähigen Schichten anzuordnen. Dies hätte aber auch die Frage aufgeworfen, hierfür sinnvolle Versagensparameter zu definieren. Stattdessen wird nun auf die Grenzschichtelemente vollständig verzichtet und ein vom Bündelkettenmodell abgeleitetes Modell verwendet, bei dem die stochastischen Bruchigenschaften in die Kontinuums-elemente integriert werden, indem diese bei Erreichen einer Grenzspannung σ_c ihre Festigkeit verlieren.

Hierzu werden die stochastischen Grenztragfähigkeiten in Form von Grenznormalspannungen in Zugrichtung dem elastischen Verhalten superponiert. Bis zum Erreichen ihrer jeweiligen individuellen Grenzspannung verhalten sich alle Elemente nach dem gleichen Elastizitätsgesetz. Erst bei Überschreiten dieses individuellen Werts verliert das entsprechende Element seine Festigkeit, wonach es keinerlei Kräfte mehr überträgt.

Eine klare Trennung zwischen Mikroriße-bene und Kontinuums-material ist durch diese Modellierung nicht mehr möglich. Die Länge (senkrecht zur Zugrichtung) eines versagten Elements repräsentiert zwar weiterhin die Länge eines Mikrorisses, aber der Ort in Zugrichtung ist nicht mehr scharf abgegrenzt. Im realen Probenmaterial resultieren Abweichungen von der mikroskopischen Riße-bene aus unterschiedlich großen Körnern mit unterschiedlicher Grenzflächenorientierung, wobei Korngrenzen bevorzugt aufreißen, wenn sie nur geringe Abweichungen von der Zugnormalen aufweisen [83]. Durch die regelmäßige Elementierung wird die reale Kornstruktur im Sinne einer Mittelung verschmiert. Das Versagen eines solchen regelmäßigen Elements und die Möglichkeit der Ablenkung des Risses nach oben und unten, also parallel zur Zugrichtung, und auf diese Weise auch in schräger Richtung, hebt diese Regelmäßigkeit in gewisser Hinsicht wieder auf. Man kann ein solches Element deshalb besser als Kreuzungspunkt von Körnern mit je einem Viertel Anteil der angrenzenden Körner bildlich interpretieren.

Im Hinblick auf die numerische Stabilität ist das Kontinuumsmodell anspruchsvoller als das Kohäsivmodell, da die Knotenkräfte einzelner Knoten unabhängig von deren Verschiebungszustand verschwinden, sobald alle angrenzenden Elemente versagt haben. Die Behandlung des damit zusammenhängenden Problems wird im Abschnitt 4.2.3 ab Seite 55 diskutiert. Ein Vorteil des Modells besteht in der Reduktion von Freiheitsgraden gegenüber dem Kohäsivmodell bei gleicher Anzahl stochastischer Einzelgrenzwerte. Dies wirkt sich sehr günstig auf die Rechenzeiten aus, da diese überproportional mit der Anzahl der Freiheitsgrade korreliert sind.

Für beide Modelle muß angemerkt werden, daß aufgrund der stochastischen Versagenseigenschaften der Elemente die ursprüngliche Symmetrie der Elementierung verloren geht, so daß immer die Gesamtprobe zu elementieren ist. Wegen der stochastisch bestimmten individuellen

Elementbelastbarkeiten ist außerdem eine Vorhersage über die Orte, an denen Elementversagen eintritt, nicht möglich. Grundsätzlich ist jedes Element potentiell ein solcher Ort; eine üblicherweise angewendete Netzverfeinerung in der Umgebung von Rißspitzen zur besseren Approximation von Spannungsverläufen ist deshalb bei dieser Art von Modellierung nicht möglich. Es wäre allerdings – zum Preis deutlich steigender Rechenzeiten – denkbar, Elemente mit höheren Ansatzfunktionen zu verwenden.

Bei beiden Versagensmodellierungen berechnet sich die relative Schädigung, b , jeweils durch die Anzahl der bei Lastmaximum gebrochenen Elemente dividiert durch die Gesamtzahl der Elemente, die brechen können.

4.2.2 Ablauf der FE-Berechnung

In den folgenden Abschnitten werden die einzelnen Teilfunktionen des FE-Programms beschrieben. Zur besseren Orientierung wird hier zuerst ein Überblick über den Ablauf der Berechnungsschritte gegeben.

Das Ziel der FE-Berechnung ist es, eine Modellprobe schrittweise solange zu dehnen, bis sie durchbricht. Die Schritte werden dabei so groß gewählt, daß am Ende eines Schritts möglichst gerade ein Element seine Belastungsgrenze erreicht und damit bricht. Das Materialgesetz dieses Elements weist an dieser Stelle eine Unstetigkeitsstelle auf, so daß eine Neuberechnung des inneren Gleichgewichts mit dem jetzt gültigen Teil des Materialgesetzes erfolgen muß. Eine Besonderheit dieses FE-Codes ist es, daß die gesteuerte Randverschiebung nicht weiter erhöht wird, sowie ein Zustand erreicht ist, bei dem Elemente brechen, da bei jedem Elementversagen damit gerechnet werden muß, daß infolge des primären Elementbruchs weitere Elemente versagen und auch brechen. Dieser Vorgang kann weitere Elementbrüche hervorrufen usw. Erst wenn keine Elemente mehr infolge der erreichten Randverschiebung brechen können, wird die Probe weiter gedehnt.

Jeder Elementbruch bewirkt, ebenso wie jedes Randverschiebungsinkrement, eine Änderung der Elementspannungen und inneren Knotenkräfte. Die Bestimmung der erforderlichen Knotenverschiebungen, die nötig sind, damit zwischen den Knotenkräften, die sich aus den Element-Materialgesetzen ergeben, Gleichgewicht herrscht, erfolgt auf herkömmliche Weise durch eine NEWTON-Iteration. Diese wiederum benötigt eine Routine zur Lösung eines Gleichungssystems, dessen Rang die Anzahl unbekannter Knotenverschiebungen ist.

In Abschnitt 4.2.3 wird zuerst das Verfahren zur Bestimmung der Knotenverschiebungen und -reaktionen gezeigt. Alle Materialgesetze bleiben währenddessen unverändert. Die Besonderheiten dabei sind ein Normierungsverfahren zur Verbesserung der numerischen Stabilität, welches besonders in Zusammenhang mit dem verwendeten iterativen Gleichungslöser erforderlich ist, und die Art der Aufteilung des Gleichungssystems in vorgegebene und gesuchte Komponenten.

Das Aufstellen der Elementanteile zur globalen Steifigkeitsmatrix wird dann zuerst für die normalen, unzerbrechlichen Kontinuumsselemente behandelt. Dieses Verfahren unterscheidet sich nicht von herkömmlichen Verfahren.

In den Abschnitten 4.2.4 und 4.2.5 werden die beiden Versagensmechanismen, für Kohäsiv- und bruchfähige Kontinuumsselemente, und die damit erzielten Auswirkungen auf deren Anteile an der Systemsteifigkeitsmatrix behandelt. Dabei wird auch gezeigt, welche Rolle die stochastisch generierten Festigkeitsgrenzwerte spielen.

In Abschnitt 4.2.6 werden die im Rahmen der NEWTON-Iteration verwendeten Methoden zur Lösung des Gleichungssystems für die Knotenverschiebungen behandelt und diskutiert.

Dabei folgt eine kurze Betrachtung von Toleranzen. Bei der Lösung des Gleichungssystems entstehen Ungenauigkeiten, die sich bei der Bestimmung der Knotengleichgewichtskräfte im umgebenden NEWTON-Verfahren auswirken. Diese wiederum bedingen Toleranzen bei den Genauigkeiten, mit denen die Elementversagenskriterien erfüllt werden können.

Schließlich wird in Abschnitt 4.2.7 die globale Schrittsteuerung behandelt, die auf die zuvor gezeigten Versagensmodellierungen zugeschnitten ist.

In den Abschnitten 4.2.8 und 4.2.9 wird die verwendete Versagensmodellierung diskutiert. In Abschnitt 4.2.8 wird das Problem der kurzzeitigen Überschreitung der Belastbarkeitsgrenzen behandelt, welches in der gleichen Form auch beim Bündelkettenmodell auftritt. In Abschnitt 4.2.9 wird die angewandte Form der Versagensmodellierung gegen andere Möglichkeiten der Versagensmodellierung im Rahmen eines FE-Codes abgewogen.

Da das verwendete FE-Programm keine eigene graphische Oberfläche besitzt, werden zuletzt in Abschnitt 4.2.10 noch die Methoden gezeigt, mit denen Daten graphisch dargestellt werden.

4.2.3 FE-Formalismus

Systemgleichgewicht

Die Diskretisierung eines FE-Modells führt zu einem Gleichungssystem der allgemeinen Form

$$\mathfrak{S} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p}, \quad (4.41)$$

wobei \mathbf{u} der Vektor aller Knotenverschiebungen, \mathbf{p} der Vektor aller Knotenkräfte und \mathfrak{S} die globale Steifigkeitsmatrix ist. Im Fall vollständiger Systemlinearität ist die Steifigkeitsmatrix unabhängig von den Verschiebungen und Gl. (4.41) läßt sich so zerlegen, daß zuerst die unbestimmten Knotenverschiebungen durch einen Gleichungslöser an den Stellen bestimmt werden, an denen die Werte im Vektor \mathbf{p} gegeben sind, woraufhin die noch unbestimmten Knotenkräfte an den Stellen, an denen die Verschiebungswerte vorgegeben wurden, durch Multiplikation bestimmt werden können. Sind aber die Knotenkräfte nichtlinear mit den Verschiebungen verbunden, ist die Steifigkeitsmatrix von den Verschiebungen abhängig, also $\mathfrak{S}(\mathbf{u})^1$, und die Lösung für Gl. (4.41) muß iterativ bestimmt werden. Dazu wird das Gleichungssystem nach TAYLOR entwickelt und wegen

$$\frac{\partial u_i}{\partial u_k} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (4.42)$$

ergibt sich für die unbekanntenen Verschiebungskomponenten bei Vernachlässigung von Ableitungstermen quadratischer und höherer Ordnung die NEWTON-Iterationsvorschrift

$$\mathfrak{S}(\mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{u}^i - \mathbf{p} + \left(\mathfrak{S}(\mathbf{u}^i) + \frac{\partial \mathfrak{S}(\mathbf{u}^i)}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}^i \right) \Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}} \quad (4.43)$$

zur Bestimmung der Verschiebungskremente $\Delta \mathbf{u}$. Der Startvektor für die Iteration der Knotenverschiebungen, \mathbf{u}^0 , ist hierbei beliebig und \mathbf{u}^{i+1} berechnet sich aus $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}$.

Ist die Steifigkeitsmatrix konstant, ihre Ableitung nach den Verschiebungen also null, löst Gl. (4.43) die Gleichung (4.41) in einem Iterationsschritt. Wegen dieser allgemeineren Gültigkeit wurde die Formulierung Gl. (4.43) implementiert und es wurde mittels eines einfachen

¹Für die in dieser Arbeit beschriebenen Materialbeziehungen reicht es aus, die Steifigkeit als Funktion der akkumulierten Gesamtverschiebung zu betrachten, wodurch Gl. (4.41) nicht inkrementell formuliert werden muß, wie es üblicherweise, z. B. durch $\mathbf{p}^M = \mathbf{p}^{M-1} + \mathfrak{S}(\mathbf{p}^{M-1}, \partial \mathbf{u}^M) \cdot \partial \mathbf{u}^M$, geschieht.

Schalters aus dem Programm heraus bestimmt, ob ein Element Beiträge zur Ableitungsmatrix der Steifigkeitsmatrix

$$d\mathfrak{S} := \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial u_k} u_j \quad (4.44)$$

liefert, wobei sich diese aus den abgeleiteten Beiträgen der Elementmatrizen aufaddieren läßt, so daß hierfür nur für die Elemente, die einen Beitrag leisten, Operationen notwendig sind.

Multipliziert man den ersten Term in Gl. (4.43) aus, setzt

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathfrak{S}(\mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{u}^i \quad (4.45)$$

und faßt die beiden Matrizen in der Klammer, \mathfrak{S} und $d\mathfrak{S}$, zur Matrix \mathfrak{K} zusammen, so ist für jede Iterationsstufe i das Gleichungssystem

$$\mathbf{b} = \mathfrak{K} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (4.46)$$

zu lösen. Um dieses besser zu konditionieren, wird eine Hauptdiagonal-Normierungsmatrix \mathfrak{N} mit $n_{ii} = \sqrt{1/K_{ii}}$ gebildet. $\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{N}\mathfrak{K}\mathfrak{N}$ hat nun in allen Nebendiagonalelementen Werte ≤ 1 , während alle Hauptdiagonalelemente eins sind. Durch gleichzeitige Normierung von $\bar{\mathbf{b}} = \mathfrak{N}\mathbf{b}$ ergibt sich das gleichwertige normierte Gleichungssystem

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathfrak{K}} \cdot \bar{\Delta} \mathbf{u} , \quad (4.47)$$

nach dessen Lösung man $\Delta \mathbf{u}$ durch

$$\Delta \mathbf{u} = \mathfrak{N} \bar{\Delta} \mathbf{u} \quad (4.48)$$

erhält. Nach der Bestimmung von \mathbf{u}^{i+1} muß gegebenenfalls $\mathfrak{S}(\mathbf{u}^{i+1})$ bestimmt werden, woraufhin mit Gl. (4.45) die verbleibenden Knotenungleichgewichtskräfte bestimmt werden können und entschieden werden kann, ob der Iterationsprozeß abgebrochen werden kann.

Will man wegen des Gewinns an numerischer Stabilität sämtliche Matrix-Vektor-Multiplikationen mit normierten Matrizen durchführen, sind pro NEWTON-Iterationsstufe sukzessiv mehrere Hin- und Rücktransformationen nötig. Aufgrund der dünnen Besetzung und besonderen Speicherung der Matrix (vgl. Abschnitt 4.2.6) sind dazu aber jeweils nur vergleichsweise wenig Multiplikationen durchzuführen, so daß besonders bei großen Systemen der numerische Stabilitätsgewinn diesen Aufwand rechtfertigt.

Bestimmung der unbekanntenen Knotenverschiebungen und -kräfte

Die Gleichungssysteme Gl. (4.41) und Gl. (4.43) bzw. (4.46) besitzen soviele Freiheitsgrade, wie das zugrundeliegende Finite-Elementnetz Knotenverschiebungskomponenten besitzt. Wo Auflagerkomponenten vorhanden oder Knotenverschiebungen vorgegeben sind, sind die Werte im Verschiebungsvektor \mathbf{u} à priori bekannt, so daß das zu lösende Gleichungssystem reduziert werden muß. Dabei entfällt die Zeile, in der die bekannte Verschiebungskomponente steht, und in allen übrigen Zeilen ist im Vektor der rechten Seite, \mathbf{p} in Gl. (4.41) und \mathbf{b} in Gl. (4.46), das Produkt der entsprechenden Spalten der Steifigkeitsmatrix mit den bekannten Verschiebungskomponenten zu addieren, damit auch die Spalten der Matrix gestrichen werden können. Bei Verwendung des iterativen Systems Gl. (4.43) bzw. (4.46) entfällt diese Addition, da alle Eingangswerte des Vektors $\Delta \mathbf{u}$ null sind, so daß es ausreicht, die Zeilen und Spalten in \mathfrak{K} zu streichen.

Durch Einführung eines Vektors \mathbf{a} , der die symbolischen Werte `U_IS_VAR` für eine Zeile/Spalte, bei der die Verschiebungskomponente unbekannt, und `U_IS_FIX` für eine Zeile/Spalte, bei der die Verschiebungskomponente vorgegeben ist, aufnimmt, ist eine Umspeicherung des zu lösenden Teilsystems nicht notwendig, sondern alle Operationen können so durchgeführt werden, als ob das Gleichungssystem um diese Zeilen und Spalten reduziert wäre.

Für die Bestimmung der Unbekannten ist der Startwert \mathbf{u}^0 des Iterationsprozesses ein beliebiger Vektor. Dieser kann also auch durch eine elastische Vorschätzung gewonnen werden, womit in rein elastischen zweiten Randverschiebungsincrementen aufgrund zu kleiner erster Schrittweiten bereits die Lösung gefunden ist. Es ist also sinnvoll, das Abbruchkriterium des NEWTON-Prozesses bereits vor Lösen des Gleichungssystems zu prüfen. Im vorliegenden Fall wurde ein Kriterium gewählt, bei dem die maximale Knotenungleichgewichtskraft einen vorgegebenen Wert, $p_{\max \text{ zul}}$, nicht überschreiten darf. Dieser Wert ist als Eingabewert implementiert und wurde meist so gewählt, daß er 0.0001 bis 0.01% der geringsten Elementbruchkraft entspricht. (Siehe dazu auch den Abschnitt „Abbruchbedingungen und Toleranzen“ ab Seite 66.)

Die Reaktionskräfte werden mit dem aktuellen Verschiebungsvektor des Iterationsschritts und der zugehörigen Steifigkeitsmatrix mit Gl. (4.41) bestimmt. Da keine Knotenkräfte eingebracht werden und deshalb an allen Freiheitsgraden, an denen die Knotenverschiebungen unbekannt sind, die Kräfte verschwinden müssen ($p_i = 0$, wenn $a_i = \text{U_IS_VAR}$), reduziert sich Gl. (4.45) für den zu lösenden Anteil des Gleichungssystems Gl. (4.43) auf ein Gleichungssystem der Form Gl. (4.41), wobei eine Seite ein negatives Vorzeichen erhält. Ist \mathbf{p} mit Gl. (4.41) erst bestimmt, werden nur die Werte an den Stellen, an denen die Verschiebung frei ist, auf Überschreiten des kritischen Werts für die zulässigen Knotenkraftungleichgewichte geprüft, um zu entscheiden, ob das Gleichungssystem (neu) zu lösen ist oder der Verschiebungsvektor als gültige Lösung des NEWTON-Iterationsprozesses akzeptiert wird.

Da das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix im Vergleich zum Lösen des Gleichungssystems praktisch keine Zeit kostet, wird sie grundsätzlich zu Beginn jeder Schleife neu aufgestellt, unabhängig davon, ob sie sich inzwischen geändert hat, weil sie entweder eine Funktion von \mathbf{u} ist, oder sich infolge von Bruchprozessen die Anteile einzelner Elemente geändert haben. Im ersten Fall wird sie zur Speichersparnis bei Berechnung der Ableitungsmatrix $d\mathfrak{S}$ durch die Matrix \mathfrak{K} überschrieben. Damit kann der Gleichungslöser als Unterprogramm so eingebaut werden, daß er die Steifigkeitsmatrix im Lauf des Lösungsvorgangs nach lokalen Bedürfnissen verändern kann.

Der Ablauf des gesamten Iterationsprozesses zur Gleichgewichtsbestimmung kann jetzt dargestellt werden:

NEWTON-Iteration zur Bestimmung der Knotenkräfte

(Hin- und Rücknormierungsoperationen sind nicht dargestellt.)

- 1- Einbau der vorgegebenen und geschätzten Knotenverschiebungen in den Verschiebungsvektor: \mathbf{u}^0 .
- NEWTON-Iterationsschleife:
- 2- Bestimmung der Steifigkeitsmatrix \mathfrak{S} bzw. $\mathfrak{S}(\mathbf{u})$;
- 3- Bestimme $\mathbf{p} = -\mathfrak{S}\mathbf{u}$. Bestimmung des maximalen Knotenungleichgewichts an den Stellen wo $a_i = \text{U_IS_VAR}$ (für Abbruchkriterium).

- 4- Wenn Abbruchkriterium erfüllt, d. h. alle $p_i \leq p_{\max}$ zul: Vektor \mathbf{u} wird akzeptiert. Berechnung der Elementspannungen. \rightarrow Verlassen der Schleife.
- 5- Wenn Abbruchkriterium nicht erfüllt: Berechnung von $d\mathfrak{S}$ und Addition zu $\mathfrak{S} := \mathfrak{K}$.
- 6- Setze $\Delta\mathbf{u}$ zu $\bar{\mathbf{0}}$
- 7- Aufruf Gleichungslöser für $\mathbf{p} = \mathfrak{K} \cdot \Delta\mathbf{u}$: Bestimmung von $\Delta\mathbf{u}$
- 8- Update $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$
- 9- weiter bei -2- mit neuer Iterationsschleife

Behandlung undefinierter Knotenverschiebungen

Bei einer Versagensmodellierung, bei der sich Risse verzweigen können, kann es vorkommen, daß Knoten von versagten Elementen umschlossen werden. Wenn – wie im vorliegenden Fall – die Elemente dann keine Festigkeit mehr besitzen, sind die Verschiebungen der Knoten undefiniert, da sie keine Gleichgewichtsbedingung mehr erfüllen können.

Viele Autoren führen in einem solchen Fall ein *Remeshing* durch, um das Gleichungssystem lösbar zu halten. Durch die bereits gezeigte Einführung des Vektors \mathbf{a} , kann eine Neubestimmung des Elementnetzes umgangen werden. Neben den beiden bisher vorgestellten symbolischen Konstanten U_IS_FIX und U_IS_VAR wird eine dritte Konstante U_IS_UNDEF eingeführt, die dazu verwendet wird, den entsprechenden Freiheitsgrad so zu behandeln, als wäre er aus dem Gleichungssystem eliminiert, d. h. bei der Lösung wird er wie ein gefesselter Freiheitsgrad behandelt und bei der Bestimmung der Knotenkräfte wird er übergangen.

Die eigentliche Schwierigkeit besteht darin, solche Knoten zu identifizieren. Bei der hier angewandten Methode wird immer, wenn ein Element versagt, untersucht, ob Knoten an diesem Element gleichzeitig zu anderen versagten Elementen gehören und ob dann mindestens ein an dem entsprechenden Knoten anliegendes Element noch intakt ist.

Dieser Algorithmus ist recht schnell, da nur jeweils bei Elementversagen wenige Knoten zu untersuchen sind. (Die anliegenden Elemente zu jedem Knoten werden bei Programmstart gespeichert.) Dieser Algorithmus versagt allerdings in den wenigen Fällen, in denen Elemente nicht der Reihe nach brechen und ein größerer Bereich mehrerer Elemente „herausbricht“, wie das in Abbildung 10.9 auf S. 139 gezeigt ist. Es gibt für diesen Fall bisher keinen zeitsparenden Algorithmus, und das Programm bricht in diesem Falle ab, da das Gleichungssystem nicht mehr positiv definit ist. Die Rechnung wird dann verworfen und in der Statistik unberücksichtigt gelassen. Da dies aber nur in sehr wenigen Fällen vor dem Zeitpunkt vorkommt, in dem das Kraftmaximum deutlich überschritten ist, wurde dafür bisher keine Lösung implementiert.

Eine andere Möglichkeit, diesen Effekt von vornherein auszuschließen, bestünde darin, versagten Elementen eine kleine Restfestigkeit zu lassen. Da anfänglich die Zahl brechender Elemente nicht einzuschätzen war und damit der daraus entstehende Fehler in den berechneten Bruchspannungen, wurde es programmintern als Fehler betrachtet, wenn Elemente als gebrochen markiert sind und ihre Festigkeit ungleich null ist.

Kontinuumselemente

Für die Kontinuumselemente wurden normale isoparametrische 4-Knoten-Elemente verwendet. Jeder Knoten besitzt die beiden Freiheitsgrade u_x und u_y . Als Ansatzfunktionen für die

Elementkoordinaten und -verschiebungen werden lineare LAGRANGE-Polynome, $\frac{1}{2}(1 \pm \xi_i)$, in einem für das Element lokalen Koordinatensystem (ξ_1, ξ_2) mit dem Definitionsbereich $-1 \leq \xi_i \leq +1$ verwendet. Die Integration der Verzerrungen und Spannungen wird am normierten Element durchgeführt.

An jedem Materiepunkt $\{x, y\}$ gilt das Elastizitätsgesetz $\bar{\sigma} = \mathfrak{C} \cdot \bar{\varepsilon}$, wobei \mathfrak{C} die Elastizitätsmatrix c_{ij} ist und die Vektoren der Verzerrungen, $\bar{\varepsilon}$, und Spannungen, $\bar{\sigma}$, die Komponenten $\{xx, yy, xy\}$ besitzen. Die Konstanten c_{ij} berechnen sich aus den elastischen Konstanten E und ν in Abhängigkeit vom angenommenen Spannungszustand, wobei $c_{31} = c_{32}$ null und $c_{ij} = c_{ji}$ sind. Zieht man die Konstanten $E/(1 - \nu^2)$ bei ebener Spannung bzw. $E/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ bei ebener Verzerrung vor die Matrix, bleibt für das verbliebene Nebendiagonalelement c_{21} noch der Wert ν in der Matrix. Die Hauptdiagonalwerte $c_{11} = c_{22}$ sind bei ebener Spannung eins und bei ebener Verzerrung $1 - \nu$ und das Schubelement c_{33} ist $\frac{1}{2}(1 - \nu)$ bzw. $\frac{1}{2}(1 - 2\nu)$. Spannungszustand, E und ν sind als Eingabeparameter codiert.

Mit der „Ableitungsmatrix“ \mathfrak{D} kann der Verzerrungsvektor am Punkt $\{x, y\}$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathfrak{D} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

geschrieben werden. Die Ableitungen nach den globalen Koordinaten sollen durch Ableitungen nach den normierten Koordinaten ξ_i substituiert werden. Da die Abbildungen $\xi_i(x, y)$ nicht bekannt sind, werden die globalen Koordinaten, $x(\xi_1, \xi_2)$ und $y(\xi_1, \xi_2)$ durch die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \quad (4.51)$$

nach den lokalen Koordinaten abgeleitet, was sich unter Zuhilfenahme der JACOBY-Matrix, \mathfrak{J} ,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathfrak{J} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

schreiben läßt. Die gesuchten Ableitungen ergeben sich durch Inversion von \mathfrak{J} zu

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathfrak{J}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} \quad \text{mit } \mathfrak{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

wobei J die Determinante von \mathfrak{J} ist.

Ordnet man nun die Elementfreiheitsgrade beliebig, aber für alle Elemente des Systems einheitlich in Bezug auf die lokalen Koordinatensysteme und ordnet ihnen Positionen in einem Vektor \mathbf{u}_{ele} zu, ordnet man dann nach dem gleichen Schema die Elementkoordinaten in einem Elementknotenkoordinaten-Vektor \mathbf{r}_{ele} und bildet eine „Formmatrix“, \mathfrak{V} , in die man Linearkombinationen der Interpolationspolynome so anordnet, daß für jeden Punkt eines Elements, also auch für die Knoten,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathfrak{V} \cdot \mathbf{r}_{ele} \quad (4.54)$$

gilt, dann gilt wegen der Isoparametrie auch

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \mathfrak{B} \cdot \mathbf{u}_{ele}. \quad (4.55)$$

Die virtuelle Formänderungsenergie, $\delta\Pi_i = \int_F \delta\bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dF$ kann

$$\delta\Pi_i = \delta\mathbf{u}_{ele}^T \iint_F (\mathfrak{D} \mathfrak{B})^T \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{B} dx dy \mathbf{u}_{ele} \quad (4.56)$$

als Integral über die Elementfläche F geschrieben werden. Mit $\iint_F dx dy = \iint_{-1}^1 J d\xi_1 d\xi_2$ ergibt sich der Anteil des Elements zur Steifigkeitsmatrix \mathfrak{S} zu

$$\mathfrak{S}_{ele} = \iint_{-1}^1 (\mathfrak{D} \mathfrak{B})^T \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{B} J d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.57)$$

wobei in \mathfrak{D} jeweils die Werte aus Gl. (4.53) eingesetzt werden müssen. Hierbei wird zwei mal durch J dividiert, wodurch insgesamt die JACOBY-Determinante einmal im Nenner übrig bleibt. Die Ableitungen der globalen nach den lokalen Koordinaten, $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ und $\frac{\partial y}{\partial \xi_i}$ erfolgen nach Substitution mit Gl. (4.54) durch Ableitung der Formfunktionen. Die Integration schließlich wird durch gewichtete Funktionswertberechnung an den GAUSSSchen Stützstellen $\xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$,

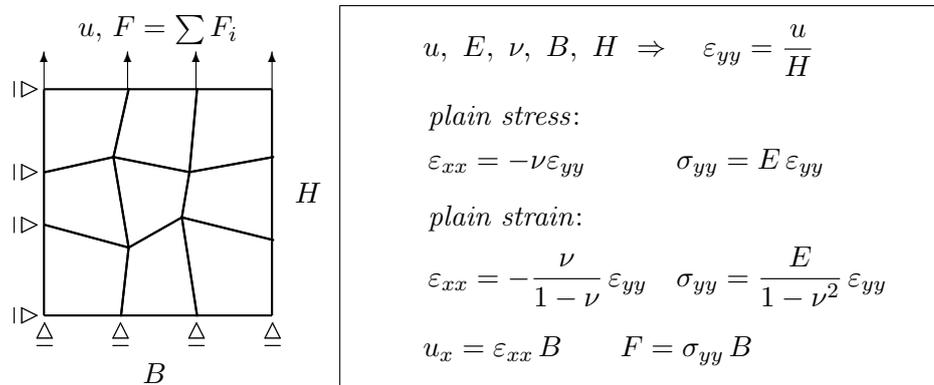
$$\iint_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_j w_k f(\xi_{1j}, \xi_{2k}) \quad (4.58)$$

durchgeführt, wobei in diesem Fall die Gewichtungsfaktoren w eins sind. Die Auswertungen der Funktionswerte an den Stützstellen ξ_{1j} und ξ_{2k} für die Ableitungsterme, die zugehörige JACOBY-Determinante und die damit berechneten Komponenten der Elementsteifigkeitsmatrix Gl. (4.57) nach Gl. (4.58) erfolgt numerisch. Schließlich werden die 8×8 Komponenten der symmetrischen Elementsteifigkeitsmatrix komponentenweise durch Summation an die entsprechenden Stellen der Systemsteifigkeitsmatrix eingebaut, die den jeweiligen Positionen der Freiheitsgrade im Systemverschiebungsvektor entsprechen.

Systemtests

Um die korrekte Implementierung der Steifigkeiten der Kontinuums-elemente zu testen, wurde ein einfaches System (siehe Abbildung 4.6) durch eine gegebene Randverschiebung belastet. Die Elemente wurden für diesen Test willkürlich schiefwinklig gewählt, um die korrekte Umsetzung der lokalen Elementansätze zu überprüfen. Die Auflagerreaktionen, Verzerrungen, Spannungen und Verschiebungen der inneren und freien Randknoten des Systems mußte dann der analytischen Lösung entsprechen. (An den σ_{xx} -Spannungen, die null ergeben müssen, läßt sich hierbei auch die Genauigkeit des iterativen Gleichungslösers in Abhängigkeit von seinem Abbruchkriterium erkennen.) Um außerdem die korrekte Implementierung der Variablenverknüpfungen beim Restart zu testen, wurde das System in einem zweiten Lastschritt aus dem Restartfile elastisch weiterbelastet.

Abbildung 4.6: Testsystem



Um die korrekte Berechnung der Schubkomponenten zu testen, wurde ein einfacher 1-Element-Test durchgeführt, bei dem die beiden unteren Knoten gefesselt und die beiden oberen Knoten in y -Richtung festgehalten und in x -Richtung um „0.5“ verschoben wurden. Die xy -Verzerrungskomponenten mußten dann an allen Integrationspunkten 0.5 und die xy -Spannungskomponenten $E/(4 + 4\nu)$ bei ebener Verzerrung bzw. $(1 - \nu)E/(4 - 4\nu^2)$ bei ebener Spannung ergeben.

4.2.4 Versagen durch Kohäsivelemente

Das Kohäsivmodell beruht auf einer Arbeit von Barenblatt [8], der für spröde Werkstoffe eine „Kohäsivkraft“ zwischen Materieteilchen annahm, die auf Molekularkräfte zurückzuführen ist. Diese Kraft nimmt bei kurzen Entfernungen zwischen den Teilchen mit wachsender Separation zuerst zu, bis die Teilchen genügend weit voneinander entfernt sind und diese Kraft verschwindet. Mit dieser Theorie umgeht er die Frage des Spannungsverlaufs in der Nähe von Risßspitzen, der nach Griffith [32] am Rand eines Risses nicht mehr endlich bleibt.

Zur Anwendung bei Risßwachstumssimulationen mit Hilfe von Finite-Elemente-Modellen wurde es 1987 von Needleman für duktile Werkstoffe eingeführt, [55], und seither von anderen Autoren weiterentwickelt (siehe z. B. [63, 70, 71]). Dabei werden Kohäsivelemente als *Interface-Elemente* zwischen Kontinuums-elementen angeordnet, wo sie die Kohäsivkräfte übertragen. Sie befolgen hierbei ein Trennungsgesetz, $f(\delta)$, siehe Gl. (4.59), wobei δ die relative Verschiebung der angrenzenden Kontinuums-elemente senkrecht zur Risßausbreitungsrichtung darstellt und f die dabei auftretende Kohäsivkraft. Die zur Risßentstehung benötigte Energie, Γ , siehe Gl. (4.60), ist dann das Integral über die $f(\delta)$ -Kurve und wird als Materialkonstante angesehen.

Im Rahmen der Entwicklung eines dem Bündelkettenmodell ähnlichen Versagensverhalten eines Finite-Elemente-Netzes wurde eine möglichst einfache, leicht zu implementierende Trennungsvorschrift zwischen den Kontinuums-elementen, die den Körnern der Mikrostruktur entsprechen, gesucht, wobei die stochastischen Festigkeitseigenschaften der Fasern in einer Trennungsvorschrift für den Zusammenhalt zwischen den Kontinuums-elementen abgebildet werden sollte. Da die stochastischen Festigkeitseigenschaften bereits den akkumulierten Festigkeiten je einer Elementgrenzschicht entsprechen, werden diese als Knotenkohäsivkräfte in einem 2-Knoten-Kohäsivelement (siehe Abbildung 4.7) implementiert.

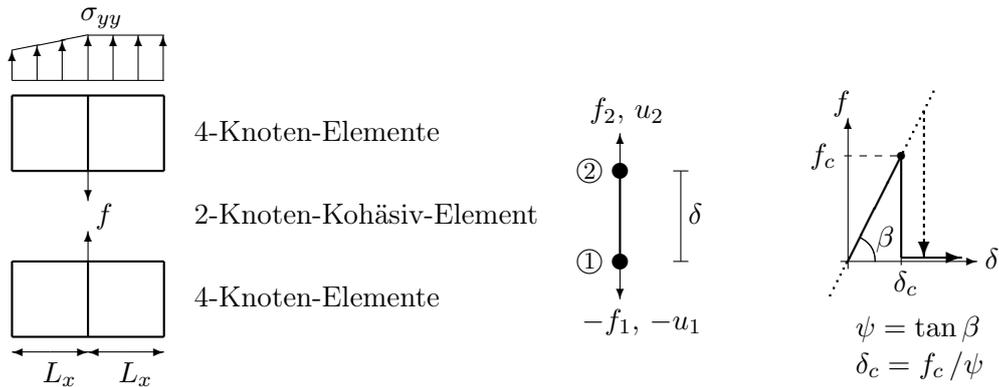
Um Vergleichbarkeit mit dem Bündelkettenmodell zu erzielen, werden diese Kohäsivelemente schichtweise angeordnet. Damit wird die Verzweigung eines Risses über Schichtgrenzen hinweg ausgeschlossen und es werden keine zusätzlichen Annahmen für die Trennung von Elementen parallel zur Zugrichtung benötigt. Die Kontinuums-elemente erhalten analog zum Bündelkettenmodell Einheitsgröße und die Zahl der Kontinuums-elemente wird aus der mittleren Anzahl der Körner in der Probe bestimmt.

Kohäsivformulierung

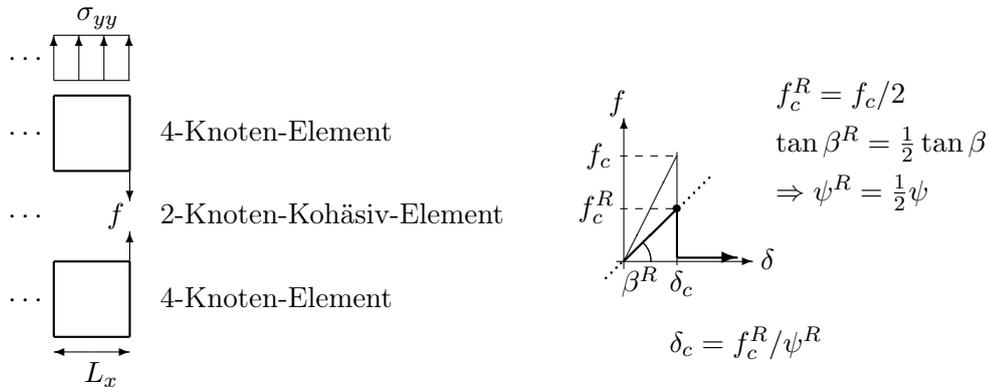
Abbildung 4.7 zeigt im linken Teil die Anordnung der 2-Knoten-Kohäsiv-Elemente: Je ein Knoten der oberen Reihe von Kontinuums-elementen wird mit je einem Knoten der unteren Reihe von Kontinuums-elementen durch ein Kohäsivelement verbunden. Dieses ist im mittleren Teil der Abbildung als stabartiges Element angedeutet. Die beiden Knoten des Kohäsivelements haben dabei in unbelasteter Ausgangslage die gleichen Koordinaten, so daß in diesem Zustand keine Lücken im Elementnetz entstehen.

Abbildung 4.7: 2-Knoten-Kohäsivelement und -gesetz

a) Mittenelement



b) Randelement



Die für die vorliegende Arbeit verwendete Kraft-Trennungsvorschrift

$$f = \begin{cases} \psi \delta & \text{solange } f \leq f_c \\ 0 & \text{danach} \end{cases} \quad (4.59)$$

ist im rechten Teil der Abbildung gezeigt. Mit der Trennung, δ , der beiden Knoten ist die Kohäsivkraft, f , linear verknüpft, solange das Element ungebrochen ist. Bei einer Kraft $f = f_c$ verliert das Element seine Festigkeit und die Kohäsivkraft wird irreversibel unabhängig von der Entfernung der beiden Knoten zu null. In diesem Zustand verhalten sich die Knoten der angrenzenden 4-Knoten-Kontinuumselemente wie unabhängige Knoten, die nur noch gemeinsame Eckknoten der beiden links und rechts angrenzenden Kontinuumselemente sind. Die Grenzkraft f_c ist die stochastisch für jedes Element individuell bestimmte Festigkeitsgrenze.

Eng verknüpft mit der vorliegenden Kohäsivformulierung ist die Steuerung der Systembelastung. Solange gerade keines der Kohäsivelemente den Übergang vom ungerissenen in den gerissenen Zustand erlebt, ist das Verhalten des Gesamtsystems völlig linear, so daß eine einmalige Vorschätzung mit einer beliebigen Inkrementgröße, d. h. ein beliebiges Randverschiebungsincrement, ausreicht, um den globalen Verschiebungsfaktor zu bestimmen, bei dem ein weiteres Element seine Festigkeitsgrenze f_c erreicht. Sobald dieser Zustand berechnet ist, wird die globale Verschiebungsincrementierung ausgesetzt, die Kraft-Trennungsvorschrift modifiziert und ein neues inneres Gleichgewicht gesucht, welches die nun neue Kraft-Trennungsvorschrift befriedigt. (Die Steuerung des FE-Programms wird in Abschnitt 4.2.7 gezeigt.)

Im Rahmen dieser Umlagerung von Kohäsivkräften und Spannungen in den Kontinuumselementen kann es vorkommen, daß weitere Kohäsivelemente ihre Festigkeitsgrenze erreichen oder sogar überschreiten. Sie gehorchen dann so lange ihrer linearen – in Abbildung 4.7 rechts, gepunktet gezeigten – Trennungsvorschrift bis zum Ende des Umlagerungsprozesses, wonach ihre Festigkeit ebenfalls reduziert wird und eine weitere Umlagerungsstufe vorgenommen wird. (Dieses Versagensverhalten wird in Abschnitt 4.2.8 diskutiert.)

Als freier Parameter, der über den Input festgelegt werden kann, wurde die Steigung ψ der Kraft-Trennungsvorschrift implementiert, da diese mangels einer bekannten Größe für die Reißenergie danach gewählt werden kann, daß die Trennung möglichst gering im Verhältnis zur elastischen Dehnung der umliegenden Kontinuumselemente ausfällt. Die eingesetzten Werte beeinflussen die Rechenzeit erheblich, da die Anzahl der Iterationen des iterativen Gleichungslösers von den Unterschieden in den Dimensionen der Werte der Steifigkeitsmatrix abhängen. Ein Steigungswert in gleicher Größenordnung wie der E-Modul der Kontinuumselemente erwies sich hierbei als günstig, während eine etwa um den Faktor 10^4 – 10^5 höhere Steigung die Rechenzeit gut verdoppelte.

Mit den gegebenen Werten ψ und f_c ergibt sich $\delta_c = f_c/\psi$. Die flächenbezogene Reißenergie Γ ergibt sich damit für zwei anliegende rechteckige Kontinuumselemente der Breite L_x zu

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{f_c \delta_c}{L_x t_P} = \frac{1}{2} \frac{f_c^2}{L_x t_P \psi}, \quad (4.60)$$

wobei die Probendicke, t_P , bei ebenen Kontinuumselementen eins ist. Die Behandlung von Kohäsivelementen an den Randknoten folgt aus den beiden Forderungen, daß einerseits die flächenbezogene Reißenergie konstant sein muß und andererseits die Knotenkraft nur die Spannung eines halben Elements überträgt. Dies wird programmintern dadurch berücksichtigt, daß sowohl die für die Randkohäsivelemente generierte Festigkeit, als auch die Steigung ψ dieser Elemente halbiert wird. Die Trennung δ bleibt dabei konstant.

Um die quer zur Zugrichtung auftretenden Kräfte zwischen den Knoten der oberen und unteren Kontinuumsreihe zu übertragen, wurde aus Gründen der Einfachheit das gleiche Kohäsivgesetz mit einem eigens wählbaren Parameter ψ_{\perp} angewendet. Dieses wird aber wegen der untergeordneten Rolle der Querverschiebungen bei kurzen Mikrorissen auch nach dem Versagen beibehalten. Diese beiden Kohäsivgesetze werden als nicht miteinander gekoppelt angesehen.

Wegen der Formulierung des Kohäsivgesetzes als Knotenkraft-Knotenverschiebungs-Gesetz ist der Anteil des Elements zur Steifigkeitsmatrix denkbar einfach und kann direkt angegeben werden. Wenn die lokalen Knoten wie in Abbildung 4.7 numeriert werden und die Komponenten des Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}_{ele}

$$\mathbf{u}_{ele} = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{1y} \\ u_{2y} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

angeordnet werden und alle positiven y -Verschiebungen und -Knotenkräfte nach oben in positive y -Richtung zeigen, wird die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbb{S}_{ele} = \begin{bmatrix} \psi_{\perp} & -\psi_{\perp} & 0 & 0 \\ -\psi_{\perp} & \psi_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi & -\psi \\ 0 & 0 & -\psi & \psi \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

durch die Steigungen des Kohäsivgesetzes wiedergegeben. Nach dem Versagen ist $\psi = 0$.

Im ungebrochenen Zustand der Kohäsivelemente führen Überlappungen der vertikal benachbarten Kontinuumsselemente zu Druckspannungen, wodurch die Überlappungen klein gehalten werden. Im gebrochenen Zustand der Kohäsivelemente können sich die vertikal benachbarten Kontinuumsselemente theoretisch beliebig überlappen, was physikalisch unsinnig ist. Die Einführung eines für den „Zug“- und Druckbereich der gebrochenen Elemente geteilten Trennungsgesetzes könnte hier sinnvoll sein. Da aber wegen der reinen Zugmodellierung diese Überlappungen bereits gerissener Elemente praktisch nicht oder erst bei starker Schädigung, und somit jenseits der Berücksichtigung bei den Auswertungen erfolgt, wurde auf die Einführung eines bimodalen Trennungsgesetzes für gebrochene Elemente verzichtet.

In der vorgestellten Form des Kohäsivgesetzes ist eine Versagensmodellierung nur für Proben mit einheitlichem Querschnitt sinnvoll, da die flächenbezogene Reißenergie durch die Konstanz der Elementbreite aller Kontinuumsselemente implizit gegeben ist. Wollte man mithilfe der 2-Knoten-Kohäsivelemente eine konsistente Reißmodellierung für Kontinuumsselemente variabler Breite (und/oder Höhe) durchführen, müßte das Trennungsgesetz modifiziert werden. Zur Berücksichtigung variabel breiter anliegender Kontinuumsselemente müssen dann die generierten Grenzkkräfte der Kohäsivelemente entsprechend der Elementrandbreite umgerechnet werden, d. h. für eine Elementbreite B_{ele} muß dann $f_c = f_c^{generiert} \cdot B_{ele}$ eingesetzt werden, und die Steigung ψ des Trennungsgesetzes muß dann ebenfalls mit B_{ele} multipliziert werden, um die Vergleichbarkeit der Reißenergie sicherzustellen. Mit dem bisher implementierten Programmcode ist dies nur sehr schwer möglich.

Zuordnung der Grenzfestigkeiten

Die stochastisch erzeugten Grenzfestigkeiten für die Fasermmodellrechnungen, die als Faserspannung pro Einheitsfaser in eine Datei geschrieben werden, werden über eine Leseschnittstelle

auch für das FE-Programm benutzt. Bei der Versagensmodellierung mittels der 2-Knoten-Kohäsivelemente können die Werte im Prinzip unverändert als Knotengrenzkräfte verwendet werden, wenn die angrenzenden Kontinuumsэлеmente Einheitsgröße besitzen und wenn man die generierten Grenzwerte für die Randelemente halbiert. (Diese Halbierung wird beim Einlesen automatisch vorgenommen.) Die globale Probenspannung errechnet sich dann aus der Systembreite, die $N-1$ Einheitsэлеmente breit ist, wenn N Grenzfestigkeiten pro Schicht generiert wurden.

Eine andere Möglichkeit, diese Grenzfestigkeiten in dem FE-Code zu verwenden, resultiert aus der Überlegung, daß die generierten Grenzfestigkeiten Grenzspannungen der Kontinuumsэлеmente darstellen. In diesem Fall verteilt man jede dieser N Grenzspannungen zur Hälfte auf jeden Knoten einer Bruchschicht. Die Halbierung der Grenzfestigkeiten der Randkohäsivelemente erklärt sich dabei von selbst, da diese nur die integrierte Grenzspannung aus einem halben Element erhalten, während die inneren Knotenelemente je eine Hälfte ihrer Kraft von beiden halben angrenzenden Kontinuumsэлеmenten beziehen. Die globale Probenspannung resultiert dann analog dem Fasermodell aus der Probenkraft dividiert durch N Einheitsэлеmente, während $N+1$ Kohäsivelemente benötigt werden.

Um einerseits die Implementierung der Kohäsivelemente zu testen und um andererseits zu untersuchen, ob einem der beiden Verteilungsschemata der Vorzug in Hinblick auf die Vergleichbarkeit von Bündelketten- und FE-Modell zu geben ist, wurde das Bündelkettenmodell mit dem FE-Code simuliert. Dazu wurden keine Kontinuumsэлеmente verwendet, sondern es wurde eine Bündelkette aus Kohäsivelementen gebildet. Alle Kohäsivelemente einer Schicht erhielten einen gemeinsamen Knoten oben und einen gemeinsamen Knoten unten, der gleichzeitig der gemeinsame obere Knoten der nächsten Kohäsivelementschicht ist. Die Ausdehnung des unbelasteten Systems ist also null. Die Generierung der $N \times M$ Grenzwerte erfolgte nur einmal. Dann wurden diese diskreten Werte einmal mit dem Bündelkettenmodell und je einmal mit jedem der beiden Verteilungsschemata auf die Kohäsivelemente berechnet. Die globale Zugspannung berechnete sich für die FE-Rechnungen so, als ob Kontinuumsэлеmente in Einheitsgröße vorhanden wären.

Der Verlauf der auf die untere Generierungsgrenze, a , normierten Probenspannung über der Schädigung ist in Abbildung 10.10 auf Seite 140 wiedergegeben. Die Kurve der FE-Rechnung, bei der den Kohäsivelementen die Grenzwerte der Fasern zugewiesen wurden (grün), verläuft nahezu exakt auf der Kurve des Bündelkettenmodells (schwarz), während die Kurve, bei der den Kohäsivelementen je die Hälfte zweier benachbarter Grenzwerte zugewiesen wurde (rot), wesentlich höhere Systemspannungen bei gleichzeitig deutlich niedrigerer Schädigung erreicht. Es zeigt sich hierbei sehr drastisch, daß die beiden Interpretationen für die Grenzbelastungen nicht zu den gleichen Resultaten führen, sondern daß es für die Vergleichbarkeit der Ergebnisse notwendig ist, daß die diskreten Versagensgrenzwerte unverändert verwendet werden.

Werden die an den Kohäsivelementen als Versagenskriterium verwendeten Grenzkkräfte direkt miteinander verglichen, zeigt sich der Grund der unterschiedlichen Ergebnisse. Für die Rechnung verwendet wurde eine Probe bestehend aus 150 Schichten à 30 Grenzwerten mit einer $\zeta=2$ breiten Grundverteilung. (Die untere Generierungsgrenze, a , betrug 500 MPa). In Abbildung 10.11 sind grün die Verteilung und die kumulative Verteilung der 4500 generierten Grenzwerte zu sehen. Diese entspricht recht gut dem analytischen Verlauf der Grundverteilungsfunktion. (Für die Häufigkeitsverteilung wurden 20 äquidistante Cluster benutzt und die Häufigkeit aller diskreten Werte innerhalb der Clustergrenzen gezählt.)

Die rote Verteilung ist die Verteilung der erzielten Grenzwerte, nachdem jeweils zwei benachbarte Grenzwerte zu halben Teilen einem Kohäsivelement zugewiesen wurden. Es ist offen-

sichtlich, daß die Grenzwertverteilung nun nicht mehr der Grundverteilung entspricht, sondern deutlich mehr Werte im mittleren Grenzwertbereich liegen. Durch die geringere Wertedichte im unteren Bereich wird eine höhere Belastbarkeit der Probe erzielt und durch die geringere Streuung der Grenzwerte setzt kaskadenartiges Durchbrechen bereits bei einer geringeren Gesamtschädigung ein.

4.2.5 Versagen von Flächenelementen

Als alternativen Versagensmechanismus wurde den elastischen Kontinuumselementen das Versagen aus ihrer elastischen Geraden heraus implementiert. Hierbei werden die stochastischen Versagensgrenzwerte als Grenznormalspannungen dieser Elemente eingelesen. Am Ende jeden Lastschritts, wenn die Knotenkräfte sich im Gleichgewicht befinden, werden die Elementspannungen berechnet und die Spannungskomponenten parallel zur Zugrichtung, σ_{yy} , mit der Versagensgrenzspannung verglichen. Beim Überschreiten dieser Spannung bricht das Kontinuumselement und sein E-Modul wird auf null gesetzt, wodurch das ganze Element keinerlei Kräfte mehr überträgt.

Die Spannungen werden an den 4 Integrationspunkten gesondert berechnet. In der Regel wird ein Element als gebrochen angesehen, wenn einer der Integrationspunkte die Elementgrenzbelastbarkeit erreicht hat.

Aufgrund der linearen Spannungs-Dehnungsbeziehung läßt sich wie bereits bei den zuvor beschriebenen Kohäsivelementen die notwendige Schrittgröße mittels elastischer Vorschätzung bestimmen, bei der das nächste Element seine Festigkeitsgrenze erreicht hat. Die Laststeuerung des Systems erfolgt somit in gleicher Weise wie beim Kohäsivmodell und ist in Abschnitt 4.2.7 beschrieben.

Bei diesem Modell können Risse nicht nur in Schichten senkrecht zur Belastungsrichtung wachsen, sondern sich in alle Richtungen ausbreiten. Für die numerische Behandlung ist dieses Modell anspruchsvoller, da hierbei die Schädigungsentwicklung dazu führen kann, daß einzelne Knoten oder sogar größere Bereiche des Systems „herausbrechen“ und kinematisch werden. Die Behandlung dieses Phänomens wurde bereits im Abschnitt 4.2.3 ab Seite 55 gezeigt.

4.2.6 Gleichungslöser

Zentraler Teil jedes Finite-Elemente-Systems ist eine Routine zur Bestimmung der Unbekannten in Gl. (4.46). Bei der Erstellung des ersten Prototyps des Finite-Elemente-Codes wurde ein zuverlässiger Gleichungslöser gebraucht, bei dem es weder auf Geschwindigkeit noch auf besondere Speicherstrukturen ankommt, der dafür aber mit wenigen algebraischen Tests für die implementierte Routine auskommt. Hierfür wurde ein einfaches GAUSSSches Eliminationsverfahren aus der Sammlung von Engeln-Müllges [28] verwendet.

Um das FE-Programm mit einer Mindestmenge an Freiheitsgraden für die stochastische Aufgabenstellung nutzen zu können, ist dieser Lösungsalgorithmus zu speicherhungrig und langsam, da wegen der Pivotisierung die vollständige Steifigkeitsmatrix inclusive führender Nullen abgespeichert werden muß.

Als verbesserter Solver wurde deshalb eine CHOLESKY-Zerlegung der Steifigkeitsmatrix implementiert. Hierbei wird die Matrix \mathfrak{K} in eine Linksdreiecksmatrix und eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{L} \mathfrak{D} \mathfrak{L}^T \quad (4.63)$$

zerlegt. Von \mathfrak{D} sind dabei nur die Diagonalelemente, d_{ii} , besetzt, die jeweils nur den Wert $+1$ oder -1 annehmen. \mathfrak{D} kann deshalb in Form eines Vektors abgespeichert werden. Die Zerlegung wird dabei so durchgeführt, daß \mathfrak{L} die wegen ihrer Symmetrie nur bis zur Hauptdiagonalen abgespeicherte Matrix \mathfrak{K} sukzessiv überschreibt. Bei dieser Zerlegung bleiben führende Nullen null, so daß auch keine Notwendigkeit besteht, für sie Speicherplatz vorzusehen. Wegen dieser Eigenschaft, bei der ein Gleichungssystem einer dünn besetzten Matrix ohne zusätzlich notwendigen Speicherplatz gelöst wird, nennt man eine solche Routine einen *Sparse-Solver*. Aufgrund der Bandstruktur von \mathfrak{K} spart dies zwischen 70 und 90% des für die volle Matrix vorzusehenden Speicherplatzes.

Das Gleichungssystem Gl. (4.46) läßt sich mithilfe von \mathfrak{L} und \mathfrak{D} durch Vorwärts- und Rückwärtsauflösung lösen, ohne weiteren Speicherplatz zu belegen, indem zuerst ein Hilfsvektor η durch

$$\mathfrak{L} \eta = \mathfrak{b} \quad (4.64)$$

bestimmt wird. Hierbei wird \mathfrak{b} durch η Zug um Zug überschrieben und anschließend $\Delta \mathbf{u}$ wegen $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}$ durch

$$\mathfrak{L} \Delta \mathbf{u} = \mathfrak{D}^{-1} \eta \quad (4.65)$$

bestimmt. Dabei kann η wiederum durch $\Delta \mathbf{u}$ überschrieben werden.

Bei der Aufstellung der Systemmatrizen stehen im Vektor der Knotenverschiebungen sowohl zu bestimmende als auch bekannte Werte, die aus den vorgegebenen Verschiebungs-Randbedingungen stammen. Wird das Gleichungssystem nicht durch Umspeicherung so zerlegt, daß bei Aufruf des Solvers im Vektor der Knotenverschiebungen nur noch Unbekannte stehen, sondern, wie bereits in Abschnitt 4.2.3 (auf Seite 54) beschrieben wurde, diese Aufteilung nur gedacht ist und durch den Vektor \mathfrak{a} (mit den symbolischen Konstanten `U_IS_FIX` und `U_IS_VAR`) definiert wird, ist dieses Verfahren ohne Einschränkung anwendbar, indem alle definierten Operationen nur auf die Zeilen/Spalten angewandt werden, für die $a_i = \text{U_IS_VAR}$ gilt.

Für größere Gleichungssysteme, wie sie wegen des stochastischen Ansatzes notwendig werden, erwies sich auch dieser Solver noch als unzureichend. Zur weiteren Einsparung von Speicherplatz wurde nach einer Möglichkeit gesucht, das Gleichungssystem auch dann lösen zu können, wenn nur für den besetzten Teil der Steifigkeitsmatrix Speicherplatz bereitgestellt wird, da dieser meist weniger als 10% der vollen Bandstruktur ausmacht. Zur Gleichungslösung muß dann eine Methode angewandt werden, die ohne Matrixinvertierung auskommt. (Die hierfür verwendete Speicherstruktur, die auch Hinweise enthalten muß, in welcher Spalte der Matrix sich die gespeicherten Werte befinden, ist in [64] beschrieben.)

Um die Matrixinvertierung zu umgehen muß das Gleichungssystem iterativ gelöst werden. Dazu wird eine Vorschätzung $\Delta \mathbf{u}^0$ des Lösungsvektors $\Delta \mathbf{u}$ des Gleichungssystems Gl. (4.46) bestimmt. Diese ist beliebig und kann der Nullvektor sein. Die nichtausgeglichenen Anteile des Gleichungssystems, die in diesem Fall die unausgeglichenen Knotenkräfte

$$\mathfrak{r}^i = \mathfrak{b} - \mathfrak{K} \Delta \mathbf{u}^i \quad \text{mit } i \geq 0 \quad (4.66)$$

sind, werden nun iterativ solange verringert, bis der ermittelte Lösungsvektor der Iterationsstufe i , $\Delta \mathbf{u}^i$, das Gleichungssystem hinreichend genau löst, m. a. W. der nichtausgeglichenen Anteil \mathfrak{r}^i gegen den Nullvektor strebt.

Als Konvergenzvorschrift zur Iteration wurde die *beschleunigte Konjugierte-Gradienten-Methode* nach [36] verwendet. Diese Methode unterscheidet sich von der *Methode der konjugierten*

Gradienten, die ihrerseits eine Variation der *Methode des steilsten Abstiegs* darstellt, durch die Verwendung einer Vorkonditionierungsmatrix, die in den Algorithmus eingebaut wird, wobei sich das Konvergenzverhalten gegenüber der einfachen Methode deutlich beschleunigt. (Testvergleiche ergaben eine um etwa den Faktor 5 schnellere Konvergenz.) Als Vorkonditionierungsmatrix wird die unvollständig zerlegte Linksdreiecksmatrix (s. o.) des CHOLESKY-Algorithmus eingesetzt. Mit „unvollständig zerlegt“ wird ein Verfahren bezeichnet, bei dem nur die besetzten Stellen der Matrix nach dem CHOLESKY-Verfahren berücksichtigt werden, also ist $L_{ij} = 0$ wenn $K_{ij} = 0$ ist.

Die Methode basiert auf der Forderung der Minimierung der potentiellen Energie

$$W(\Delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{b}^T \Delta \mathbf{u}, \quad (4.67)$$

wobei der Vektor \mathbf{r} die Richtung der größten Variation von W am Punkt $\Delta \mathbf{u}$ darstellt. Vom Punkt $\Delta \mathbf{u}^i$ wird solange in Richtung von \mathbf{r}^i gegangen, bis das Potential des neuen Punktes $\Delta \mathbf{u}^{i+1}$, $W(\Delta \mathbf{u}^{i+1})$, wiederum minimal ist, usw.. Mittels dieser senkrecht aufeinanderstehenden „Richtungsvektoren“ werden nacheinander additive Verbesserungen für $\Delta \mathbf{u}$ bestimmt. Wenn keine Rundungsfehler auftreten, konvergiert das Verfahren in endlich vielen Schritten gegen die exakte Lösung. Eine vollständige Beschreibung dieser Lösungsmethode und ihrer Implementierung findet sich in [64] und soll hier nicht wiederholt werden.

Als Abbruchkriterium dieser Iteration sind 3 verschieden strenge Kriterien implementiert, die über den Programminput selektierbar sind. Je strenger das Abbruchkriterium ist, desto mehr Rechenzeit benötigt die Iteration. Das strengste Kriterium sieht vor, daß in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsstufen sich keine einzige der Komponenten des Lösungsvektors, $\Delta \mathbf{u}$, mehr (numerisch) ändert:

$$\sum_{j=1}^J (\Delta u_j^i - \Delta u_j^{i-1})^2 = 0 \quad \text{mit } J = \text{Anz. FG.} \quad (4.68)$$

Eine etwas weniger strenge Bedingung sieht vor, daß sich am Betrag der verbesserten Lösung, $\|\Delta \mathbf{u}^i\|$, gegenüber dem Betrag der vorangegangenen Lösung, $\|\Delta \mathbf{u}^{i-1}\|$, nichts mehr ändert²:

$$\|\Delta \mathbf{u}^i\| - \|\Delta \mathbf{u}^{i-1}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^J (\Delta u_j^i)^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^J (\Delta u_j^{i-1})^2} = 0 \quad \text{mit } J = \text{Anz. FG.} \quad (4.69)$$

Und die „weichste“ Bedingung schließlich ist, daß keine Komponente des Restvektors größer ist als die zulässige Knotenungleichgewichtskraft des umgebenden NEWTON-Verfahrens, also $\max |r_j^i| \leq p_{\max \text{ zul}}$. Im Normalfall wurde diese letzte Bedingung verwendet. Die Rechenzeiterparnis gegenüber der strengsten Abbruchbedingung beträgt hierbei bis zu 60%, ohne daß bei Vergleichsrechnungen je deutlich unterschiedliche Ergebnisse, also Bruchspannung und zugehörige Schädigung, beobachtet worden wären.

Alle 3 Lösungsroutinen sind in das FE-Programm eingebaut und über den Programminput selektierbar. Speicherplatz ist nur soviel vorgesehen, wie das Minimalsystem benötigt. Wird einer der ersten beiden Solver ausgewählt, wird bei Programmstart eine Initialisierungsroutine aufgerufen, um den zusätzlich notwendigen Speicherplatz einmalig für den restlichen Programmablauf bereitzustellen. Bei Verwendung einer der beiden ersten Solver muß dann allerdings

²Wegen der Summation bei der Bestimmung des Skalarprodukts ist dieser Zustand früher erreicht, da die Addition des Quadrats sehr kleiner Werte keine Änderung der numerischen Summe bewirkt.

jeweils bei Solveraufruf umgespeichert werden, so daß eventuelle Geschwindigkeitsvorteile des *Sparse*-Solvers bei sehr kleinen Systemen kaum zum Tragen kommen können. Der Vorteil dieser Möglichkeit besteht aber darin, daß jederzeit – vorausgesetzt das System ist hinreichend klein – Vergleiche angestellt werden können, was besonders anfängliche Tests möglich machte.

Abbruchbedingungen und Toleranzen

Die Genauigkeit, mit der die Lösung der Knotenverschiebungen bestimmt wird, kann durch das Abbruchkriterium der Lösungsiterationen bestimmt werden. Diese Genauigkeit schlägt auf die Genauigkeit bei der Bestimmung der Knotenkräfte des umgebenden NEWTON-Algorithmus durch. Beim Kohäsivmodell, bei dem die Knotenkräfte direkt mit den Versagenskriterien der Elemente verknüpft sind, ist sofort einsichtig, daß die Genauigkeit, mit der dieses Kriterium erfüllt werden soll, nicht höher sein darf, als das für das Knotengleichgewicht.

Der Input des FE-Programms kennt 2 Toleranzparameter, einen für das zulässige Knotenungleichgewicht und einen für das Treffen der Elementversagenskriterien. Das letztere bestimmt, wie hoch der Toleranzbereich zwischen dem Versagensgrenzwert eines Elements und der erreichten Genauigkeit bei der Bedingung für das Elementversagen ist, d. h. ist die erreichte Knotenkraft eines Kohäsivelements im Bereich Versagensgrenzwert \pm Toleranz, bricht das Element. (Beim Kontinuumsmodell ist das die Spannung.) Da diese Toleranz nicht kleiner sein darf, als die Toleranz beim Knotengleichgewicht, wird letztere ggf. auf die erste abgemindert.

Die weiche Abbruchbedingung des Solvers, $\max |r_j^i| \leq p_{\max \text{ zul}}$, ist an die Toleranz geknüpft, die für das Gleichgewicht der Knotenkräfte gefordert wird, da nicht zu erwarten ist, daß die Knotenkräfte (wenn nicht zufällig) mit höherer Genauigkeit durch eine NEWTON-Iteration bestimmt werden können, als der zugehörige Gleichungslöser diese Werte bestimmt.

Die ersten beiden Abbruchkriterien des Gleichungslösers sind dabei grundsätzlich mit der weichen Bedingung nicht direkt vergleichbar, da sich die ersten auf den Lösungsvektor beziehen, die letzte aber nur indirekt damit verbunden ist. Dabei ist anzumerken, daß gezeigt wurde, daß der Restvektor \mathbf{r} auch dann noch kleiner wird, wenn der Lösungsvektor Δu numerisch bereits auf der Stelle tritt, sich also nicht mehr ändert. Dies liegt daran, daß \mathbf{r} einen eigenen update-Algorithmus besitzt und nur am Anfang der Iteration mit Gl. (4.66) bestimmt wird (siehe [64]). Ein zu strenges Abbruchkriterium für die Restkräfte würde sich deshalb zwar erfüllen lassen, dies würde aber die Lösung gegenüber der Forderung Gl. (4.68) nicht verbessern. Es ist deshalb durchaus sinnvoll, das Abbruchkriterium, das sich auf die Restkräfte bezieht, als weich zu bezeichnen, da es nur bei einer weniger strengen Forderung konsistent einsetzbar ist. Es seien deshalb hier einige Größenordnungen wiedergegeben.

In dieser Arbeit wurden für das Knotenungleichgewicht Kräfte zugelassen, die bei 0.1 bis 0.001 N liegen, während die Versagensgrenzkkräfte des Kohäsivmodells ≥ 400 N generiert wurden. Da sich die Restkräfte bei der verwendeten Formulierung im Verlauf der Rechnung nicht aufaddieren, sondern in jedem Lastschritt als Ganzes neu berechnet werden, reicht es völlig aus, Knotenkräfte bis auf 0.1 N genau zu bestimmen.

Werden 20×100 Versagensgrenzwerte mit einer Grundverteilungsbreite $\zeta=5$ generiert, beträgt der mittlere Abstand³ dieser Versagensgrenzen untereinander 1 N, bei 40×200 generierten Grenzwerten 0.25 N. Eine Toleranz für das Versagen in gleicher Größe des zulässigen Knotenungleichgewichts, 0.1 N, ist damit so gewählt, daß selbst bei maximaler Ausnutzung der

³ohne Berücksichtigung der exponentiellen Verteilungsfunktion, bei der im unteren Bereich die Werte weiter auseinanderliegen als im oberen Bereich

Toleranz an jedem Knoten der mittlere Abstand zwischen den Versagensgrenzwerten nicht überschritten wird. Es zeigt sich aber auch, daß bei sehr schmalen Grundverteilungsbreiten oder sehr vielen Elementen, diese Toleranz besser abgesenkt wird, will man vermeiden, daß zu viele Elemente auf einmal aufgrund der großen Toleranz brechen.

Wird für den Gleichungslöser das Restkräfteabbruchkriterium so gewählt, daß maximal 0.1 N zulässig sind, liegt der normierte Betrag der Differenz des Lösungsvektors zweier aufeinanderfolgender Iterationen, das ist die Wurzel des auf die Anzahl der Freiheitsgrade normierten strengen Solver-Abbruchkriteriums,

$$\sqrt{\frac{\|\Delta\Delta u\|}{J}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (\Delta u_j^i - \Delta u_j^{i-1})^2}{J}} \quad \text{mit } J = \text{Anz. FG.}, \quad (4.70)$$

bei etwa 0.001 mm für ein 20×100 Elemente-System wenn das Abbruchkriterium greift. Das ist nach ca. 80 Iterationen erreicht.

Bei Verwendung der strengsten Abbruchbedingungen, wenn also der Wert von Gl. (4.70) null ist, ist der maximale Wert des Restkräftevektors etwa 5 e-12 N; dafür werden etwa 200 Iterationen benötigt.

Das Abbruchkriterium Gl. (4.69) ist dabei nach ca 130 Iterationen erreicht, wobei der Wert des Restkräftemaximums ebenfalls bei 5 e-12 N liegt. Der Wert für Gl. (4.70) beträgt dann etwa 3 e-16 mm.

4.2.7 Steuerung des FE-Programms

Die Probenbelastung erfolgt durch eine Knotenerschiebung am oberen Rand, wobei alle Knoten des Rands jeweils um den gleichen Betrag, u^{oben} , bewegt werden. Im Verlauf einer Rechnung wird die Randverschiebung genau soweit erhöht, daß mindestens ein Element seine individuelle Festigkeitsgrenze gerade erreicht. Danach gilt das Element als gebrochen und seine Festigkeit wird auf Null reduziert, was die Neuberechnung des inneren Verschiebungs- und Spannungszustands des verbliebenen Systems erfordert. Wenn diese nicht zum Versagen weiterer Elemente führt, wird die Randverschiebung soweit vergrößert, daß wiederum mindestens ein Element seine Festigkeitsgrenze erreicht. Nach dem Versagen einiger Elemente reicht das Versagen nur eines weiteren Elements zum kaskadenartigen Versagen weiterer Elemente aus.

Bestimmung der Verschiebungsinkremente

Vergrößerungen der Randverschiebung werden nur durchgeführt, wenn bei der erreichten Probendehnung keine weiteren Elemente mehr versagen können. Wegen der Linearität der Materialgesetze in diesem Zustand kann durch einen Schätzschrift die für das Brechen eines weiteren Elements notwendige Randverschiebung berechnet und aufgebracht werden, ohne diese in kleinen Zwischenschritten zu erhöhen, wie dies notwendig wäre, wenn ein nichtlineares Materialgesetz verwendet würde.

Die Berechnung des notwendigen Inkrements berechnet sich dabei für jedes Element durch eine lineare Inter- bzw. Extrapolation der für das Bruchkriterium maßgeblichen Werte ohne Berücksichtigung von Toleranzen. Für das Versagen der Kontinuums-elemente ist das die yy -Spannungskomponente, für das Kohäsivmodell die yy -Komponente der Knotenkraft. Die σ_{yy} -Werte des letzten abgeschlossenen und des aktuellen Belastungsschritts sind bekannt, σ^{i-1} und σ^i . Damit läßt sich ein Vielfaches, λ , berechnen, um die Grenzspannung, σ_c , zu erreichen, also

$\lambda = (\sigma_c - \sigma^{i-1}) / (\sigma^i - \sigma^{i-1})$. Dieses wird auf die aktuelle Schrittgröße angewandt. Der kleinste so errechnete Wert aller Elemente liefert dann den Faktor der erforderlichen Schrittgröße, $\Lambda = \min \lambda$. Damit wird das erforderliche Verschiebungsinkrement zu $\Delta u^{i+1} = \Lambda \Delta u^i$ bei Schrittweiterholung, d. h. $\Lambda < 1$, bzw. $\Delta u^{i+1} = (\Lambda - 1) \Delta u^i$ bei einem zusätzlichen Schritt, d. h. $\Lambda > 1$.

Anhalten der Probendehnung bei Elementversagen

Das theoretisch vorhergesagte und bei den Fasermodellen auch gezeigte kaskadenartige Durchreißen eines großen Teils des Restquerschnitts der Probe geht im Experiment plötzlich vonstatten und zeigt sich dort praktisch unangekündigt. Um dieses Phänomen im Finite-Elemente-Modell abbilden zu können, wurde das Elementversagen als plötzliches Versagen modelliert und die Inkrementierung der makroskopischen Verschiebung bei Bruch eines Elements solange angehalten, bis die im Probeninneren aufgrund diskreter Mikrorißentstehung hervorgerufenen Spannungsumlagerungen auf bis dahin ungeschädigte Elemente – und damit möglicherweise nachfolgend induziertes Rißwachstum – abgeschlossen sind und das System wieder einen stabilen Zustand erreicht hat oder durchgebrochen ist.

Würde man die makroskopische Verschiebung während dieses Umlagerungsprozesses weiter erhöhen, würden sich die beiden Prozesse überlagern und immer nur ein weiteres Stück Rißwachstum bei jedem Verschiebungsinkrement berechnet werden. Die Probenspannung würde dann einerseits durch die Bruchvorgänge gemindert, während sie durch das Verschiebungsinkrement gleichzeitig zuerst einmal vergrößert würde, so daß sich das Spannungsmaximum verlagern würde. Der Betrag dieser Verlagerung hinge von der Schrittgröße und der Dichte der diskreten Grenzbelastbarkeiten ab und wäre wegen des stochastischen Charakters der Elementfestigkeiten nicht kalkulierbar.

Bekannte Finite-Elemente-Programme, wie etwa ABAQUS⁴, gestatten kein Anhalten der Lastinkrementierung aus dem Programmablauf heraus. Bei der Verwendung von ABAQUS-*User Elementen* beispielsweise kann lediglich eine faktorielle Verkleinerung der Schrittweite gefordert werden⁵.

In dem dieser Arbeit zugrundeliegenden selbst entwickelten FE-Code wird bei Versagen eines Elements das globale Verschiebungsinkrement, Δu^{oben} , mittels eines einfachen Schalters zu null gesetzt, so daß ausschließlich innere Belastungsumlagerungen berechnet werden, bis alle daraus entstandenen Folgebruchvorgänge abgeschlossen sind. Danach kehrt das Programm zur normalen globalen Verschiebungsinkrementierung zurück.

Lastumlagerung

Die Feststellung des inneren Gleichgewichts nach dem Bruch eines Elements erfolgt unter der Annahme, daß sich die gesamten Kräfte im Probeninneren quasi-statisch sofort nach dem Elastizitätsgesetz auf die verbleibenden Elemente umlagern. Hierbei bleiben ungebrochene Elemente bis zum Ende dieses Rechenschrittes ungebrochen, auch wenn ihre Festigkeitsgrenze dabei überschritten wird. Erst am Ende dieses Schrittes werden alle Elemente, die infolge der inneren Lastumlagerung ihre Grenztragfähigkeit erreicht oder überschritten haben, ihrerseits als gebrochen markiert und der Spannungsumlagerungsprozess zum Erhalt eines neuen inneren

⁴ABAQUS[®] ist ein Programm der Hibbitt, Karlsson & Sorensen (HKS), Inc, Pawtucket, Ri, USA

⁵siehe UEL: Parameter `pnewdt` siehe [46]

Gleichgewichts erneut durchgeführt. (Zur Problematik der Lastumlagerung ohne Zulassung von Grenzfestigkeitsüberschreitung siehe Abschnitt 4.2.8)

Ende der Rechnung

Noch bevor kaskadenartige Rißvergrößerung einsetzt, erreicht die Probe ihre maximale Zugfestigkeit. Dies wird als Zeitpunkt des makroskopischen Probenbruchs gedeutet. Danach erfolgt ein starker Abfall der äußeren Reaktionskraft. Die Fortsetzung der Rechnung nach Überschreiten der Maximallast ist physikalisch nicht mehr sinnvoll und daher aus ökonomischen Gründen überflüssig.

Jede Erhöhung der Randverschiebung erzeugt ein lokales Maximum im globalen Reaktionskraftverlauf, da bei Festhalten des äußeren Verschiebungszustands die Reaktionskraft nach dem Bruch wieder absinkt. Das Überschreiten des Kraftmaximums kann somit erst einige Schritte später festgestellt werden, wenn nämlich das Absinken der Reaktionskraft signifikant wird. Aufgrund des kaskadenartigen Versagens ab einer gewissen Vorschädigung nimmt nach dem Erreichen der Maximallast die globale Kraft sehr schnell ab, während gleichzeitig die Schädigung nach oben schnell. Typische Kurven für diese Verhalten sind in den Abbildungen 10.12 und 10.13 gezeigt. Als guter Kompromiß zwischen Eindeutigkeit und Rechenaufwand erwies es sich, die Rechnungen abzubrechen, wenn die globale Kraft unterhalb 80% der bisher erreichten Maximalkraft abgesunken ist.

Führt man die Rechnung danach dennoch weiter, erfolgt in den wenigsten Fällen ein eindeutiges Durchbrechen der Modellprobe, sondern es kommt letztlich aufgrund vorherrschender Schubverformungen zu einer Delaminierung der Probe, wie sie auch in Abbildung 10.16 zu sehen ist. Die zugehörige makroskopische Last-Verformungskurve, die dabei der eines Materials wie Beton ähnelt, bei dem noch deutliche Spannungen nach Überschreiten der Maximallast beobachtet werden (siehe z. B. [2, 21]), nicht aber den Last-Verformungskurven der dieser Arbeit zugrundeliegenden Werkstoffe, ist in Abbildung 10.15 rechts zu sehen. Dieser Delaminierungsvorgang erstreckt sich oft über sehr viele Lastschritte. Ein frühzeitiger Abbruch der Rechnungen trägt deshalb zu erheblichen Einsparungen von Rechenzeit bei.

Im Folgenden wird der Berechnungsablauf schematisch dargestellt.

Berechnungsablauf des FE-Programms

- 1- Neues Inkrement mit beliebiger Randverschiebung. Innere Verschiebungen iterieren, daß Knotenkräfte im Gleichgewicht (NEWTON-Iteration). Weiter bei -2-, -3- oder -4-.
- 2- *Wenn Inkrement zu klein (es bricht kein Element):* Schritt wird akzeptiert. Schrittgrößenvorschätzung (> 1) zum Erreichen der nächsten Grenzspannung berechnen. Reaktionskraft aus Knotenkräften berechnen. Update: $\max F$. Ausgaben[†]. Weiter bei -5-.
- 3- *Wenn Inkrement zu groß (kleinste Grenzspannung überschritten):* Inkrement verwerfen. Schrittgrößenvorschätzung (< 1) zum Erreichen der nächsten Grenzspannung berechnen. Weiter bei -5-
- 4- *Inkrement richtig (mindestens ein Element bricht gerade):* Schritt wird akzeptiert. Untersuchung, welche Elemente brechen, und deren Markierung. Reaktionskraft aus Knotenkräften berechnen, dabei werden die aktuell neu gebrochenen Elemente nicht berücksichtigt. Update: $\max F$. Ausgaben[†]. -7- prüfen. Wenn weiter, dann weiter bei -6-.

- 5- Neues Inkrement mit Randverschiebung aus Vorschätzung. Innere Verschiebungen iterieren, daß Knotenkräfte im Gleichgewicht sind (NEWTON-Iteration). Weiter bei -4-
- 6- Neues Inkrement, wobei Randverschiebung unverändert bleibt. Festigkeit von als gebrochen markierten Elementen ist Null. Innere Verschiebungen iterieren, daß Knotenkräfte im Gleichgewicht sind (NEWTON-Iteration). Feststellen ob weitere Elemente brechen und ggf. markieren. Reaktionskraft aus Knotenkräften berechnen, dabei werden die zuletzt gerade gebrochenen Elemente nicht berücksichtigt. Update: $\max F$. Ausgaben[†]. -7- prüfen. Wenn weiter: falls weitere Elemente gebrochen markiert sind -6- wiederholen, andernfalls weiter bei -1-.
- 7- Rechnung wird abgebrochen, wenn $F \leq 0.8 \cdot \max F$.

[†] ausgegeben werden hierbei einerseits (in ein „*.tab-File“) die Randverschiebung der oberen Knoten, u^o , die makroskopische Last, F =Summe der Knotenauflegerkräfte, und die Anzahl gebrochener Elemente, N_b ; gleichzeitig werden die Nummern der gerade neu gebrochenen Elemente in eine Kontrolldatei ausgegeben.

4.2.8 Überschreiten der Belastbarkeitsgrenzen

Am Beispiel des Kohäsivmodells wurde das Probenverhalten analysiert, wenn das Materialgesetz nach Elementbruch eine unstetige Änderung erfährt, wie es die in Abschnitt 4.2.4 gezeigte Versagensmodellierung mit sich bringt.

Setzt man dabei die Festigkeit eines Kohäsivelements, welches seine Tragfähigkeitsgrenze erreicht hat, plötzlich zu null, erhalten umliegende Elemente eine ebenso plötzliche Laständerung, die sie über ihre Tragfähigkeitsgrenze hinaus belasten kann.⁶ Will man dies vermeiden, muß ein Zustand ermittelt werden, der unter Berücksichtigung sämtlicher Einzelbelastbarkeiten jedem Element eine Belastung zuweist, die auf ihren Kraft-Verschiebungskurven unterhalb des jeweiligen Grenzwerts f_c liegt oder null ist, wenn ihre Belastbarkeit durch die Lastumlagerung überschritten würde. Dieser Vorgang würde üblicherweise iterativ geschehen. Bei einem Gradientensprung oder einer Unstetigkeitsstelle im Materialgesetz ist dies aber nicht durchführbar.

Setzt man die Elementsteifigkeit herab, sobald ein Element seine Belastbarkeitsgrenze erreicht hat, führt das dazu, daß Nachbarelemente bei der Umordnung der inneren Kräfte einen Sprung in ihrer Belastung erleben, der sie möglicherweise über ihre Belastbarkeit hinaus belastet. In der Folge werden auch Elemente unter- und oberhalb dieser Elemente höher belastet und bekommen damit den Belastungssprung ebenfalls zu spüren. Auf diese Weise kann es vorkommen, daß als Folge der plötzlichen Lastumlagerung mehrere Elemente in verschiedenen Schichtebenen des Systems gleichzeitig ihre Belastbarkeitsgrenze überschreiten und dann in einem weiteren Lastumlagerungsschritt gleichzeitig als gebrochen behandelt werden, so daß die Schädigung überschätzt wird.

Alternativ dazu kann die Kraft, die das versagende Element bisher getragen hat, in kleinen Schritten auf null reduziert werden, so daß jedes andere ungebrochene Element eine Laständerung entsprechend dem reduzierten Lastanteil erhält, womit umliegende Elemente in kleineren Sprüngen mehrbelastet werden und somit möglicherweise weniger Elemente ihre Versagensbedingung überschreiten.

⁶Dies ist beim Bündelkettenmodell nicht anders, dort muß allerdings keine Gleichgewichtsbestimmung durchgeführt werden.

Ein Festhalten der Relativverschiebung δ_c des brechenden Elements bei diesem schrittweisen Vorgehen ergibt dabei keinen Sinn, da das anschließende Freilassen der Relativverschiebung eine neue Gleichgewichtssuche erfordert. Es ist aber möglich, einen Gleichgewichtszustand zu finden, bei dem die Kraft des Kohäsivelements auf einem beliebig niedrigeren Level, $f_R = \lambda \cdot f_c$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ „eingefroren“ wird und die zugehörige Separation $\delta > \delta_c$ gesucht wird. Dies entspricht einem vollplastischen Trennungsgesetz bei einem definierten Kraftzustand.

Um diesen Zustand zu finden, muß die Forderung $f_R = f^i$ im Rahmen der NEWTON-Iterationsvorschrift Gl. (4.43) für das Element in allen Iterationsstufen erfüllt sein. Zu Beginn des Inkrements herrscht durch das willkürliche Herabsetzen der Reaktionskraft eines Elements Knotenungleichgewicht, so daß dieses erst iterativ ermittelt werden muß. Das Kohäsivgesetz wird zu Beginn des Inkrements für das Element mit der reduzierten Kraft bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix so formuliert, daß $f^0 = f_R$ gilt, d. h. $\psi^0 \delta^0 = f_R$ für beliebige Separation δ^0 , also $\psi^0 = f_R / \delta^0$. Der Elementanteil für den $\Delta \mathbf{u}$ -Term der NEWTON-Vorschrift Gl. (4.43), $\mathfrak{K} = \mathfrak{S} + d\mathfrak{S}$ muß nun in jeder Iterationsstufe i verschwinden. Für das Kohäsivelement kann dieser Term

$$\frac{\partial(\psi\delta)}{\partial\delta} \Delta\delta = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\delta} \Big|_i \delta^i + \psi^i \right) \Delta\delta \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.71)$$

geschrieben werden, wobei ψ^i nicht verändert werden kann und $\Delta\delta$ variabel bleibt. Um die Forderung zu erfüllen, wird

$$\frac{\partial\psi}{\partial\delta} = -\frac{\psi^i}{\delta^i} \quad (4.72)$$

gesetzt, womit sich der y -Anteil der Ableitungsmatrix der Steifigkeit, $d\mathfrak{S}$, zu

$$d\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} -\psi^i & \psi^i \\ \psi^i & -\psi^i \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

ergibt. Hierbei wird in jeder Iterationsstufe $\psi^i = f_R / \delta^i$ gesetzt.

In den Abbildungen 10.14 und 10.16 ist ein Testsystem mit Kohäsivelementen gezeigt, bei welchem die Last versagter Elemente einmal in kleinen Stufen (Abbildung 10.14) umgelagert wurde und einmal in großen Stufen (Abbildung 10.16). Es zeigt sich deutlich, daß das plötzliche vollständige Versagen die Delaminierung des Systems begünstigt.

Es wäre deshalb wünschenswert, die Reduzierung der von einem brechenden Element übertragenen Last in so kleinen Schritten zu reduzieren, daß jedes (aufgrund von Lastumlagerungen) nachfolgend brechende Element seine individuelle Festigkeitsgrenze gerade eben erreicht, um somit bei keinem Element eine temporäre Überbelastung zuzulassen. Dies ist allerdings theoretisch undurchführbar, wie leicht zu erkennen ist, wenn man einsetzende Kettenreaktionen berücksichtigt: bricht nämlich als Folge einer bestimmten Lastreduzierung des ersten Bruchs ein weiteres Element kann das dritte Element bereits seine Grenztragfähigkeit deutlich überschreiten. Wird die Last aber um einen kleineren Betrag reduziert, bricht das zweite Element noch nicht. Die Lastreduzierung des zweiten Bruchs müßte also unabhängig vom ersten gesteuert werden. In der Konsequenz für nahezu beliebig viele aufeinanderfolgende Umlagerungsprozesse würde dies zu einem Optimierungsproblem werden, was aber physikalisch keinen Sinn mehr ergibt.

Es zeigt sich an dieser Überlegung, daß die schrittweise Lastreduzierung einen praktisch willkürlichen Effekt erzeugt, da jeder Faktor für die Lastreduktion willkürlich ist. Andererseits zeigte sich aber auch, daß dieses Phänomen der Überbelastung von Elementen erst auftritt,

wenn gleichzeitig das globale Lastmaximum überschritten wird, wie in der globalen Last-Verschiebungskurve für das Beispiel (Abbildung 10.15) zu sehen ist: trotz des deutlich unterschiedlichen Versagensverlaufs zeigt sich kein Unterschied in dieser Kurve, die in diesem Beispiel aufgrund der sehr geringen Streuung der Einzelfestigkeiten bereits beim Bruch des ersten Elements ihr Maximum erreichte.

Für das vorangegangene Beispiel wurde eine schmale Verteilung, $\zeta = 0.57$ nach Gl. (3.44), verwendet. Bei Grundverteilungen mit größerer Streuung der Einzelfestigkeiten, wie sie eigentlich bei allen Rechnungen, die dieser Arbeit zugrundeliegen, angewendet wurden, zeigte sich eine stetig wachsende Zahl von Mikrorissen, die selten mehrere Folgebrüche in der gleichen Laststufe nach sich zogen, bis schließlich das ultimative, kaskadenartige Rißwachstum einsetzte. Dieses erfolgte dann stets erst nach dem Überschreiten der Maximallast.

4.2.9 Diskussion der Schädigungsmodellierung

Eine der ersten Überlegungen bei der Entwicklung eines für das zugrundeliegende spröde Werkstoffverhalten adäquaten Finite-Elemente-Modells bestand aus grundsätzlichen Erwägungen, wie das Schädigungsverhalten modelliert werden könnte.

Das hier verwendete Materialverhalten ist durch zwei Merkmale gekennzeichnet: lineares Verhalten bis zum Bruch und plötzliches, vollständiges Versagen, also unstetiges Materialverhalten bei Bruch. Die Punkte, in denen im Materialgesetz der einzelnen Elementen die Unstetigkeitsstelle auftritt, werden statistisch generiert.

Eine Alternative zu diesem Vorgehen wäre gewesen, ein kontinuierliches Materialgesetz zu verwenden, welches möglichst auch noch stetige Ableitungen besitzt, wie es z. B. von Scheider für Kohäsivelemente vorgeschlagen wird, [63]. Das Trennungsgesetz hätte dann dahin abgewandelt werden können, daß die oberen Umkehrpunkte, σ_{max} , nach stochastischen Gesetzmäßigkeiten randomisiert würden. Dieses Materialgesetz ist nicht mehr linear mit der Folge, daß die Randverschiebungen auch dann inkrementell aufzubringen sind, wenn gerade keine Elemente brechen. Dies würde die ohnehin bereits hohen Rechenzeiten deutlich weiter vergrößern. (Zu den Rechenzeiten mit dem vorhandenen Materialgesetz siehe Kapitel 6.1.4.) Vor allem in den Bereichen der oberen Umkehrpunkte des Trennungsgesetzes erfordert dies sehr kleine Schrittweiten, damit die Vorzeichenwechsel bei den Ableitungen numerisch bewältigt werden können. Da diese Punkte aber zusätzlich durch die Randomisierung über einen weiten Bereich gestreut wären, würde dies extrem kleine Schrittgrößen während des gesamten Rechenlaufs erzwingen. Hierbei ist nicht einmal sicher, ob das Verfahren konvergent ist, da zwischen den Kurvenumkehrpunkten zufällige Abstände beliebiger Größe generiert werden würden. Ein nichtlineares Materialgesetz mit stetiger Ableitung wurde deshalb nicht verwendet.

Als weitere Alternative hätte ein abschnittsweise lineares, aber stetiges Materialgesetz mit unstetiger Ableitung verwendet werden können. In einem linearen Bereich vor dem Elementversagen hätte die Schrittsteuerung ähnlich der für das verwendete Materialgesetz durchgeführt werden können, die Schrittgröße also linear vorgeschätzt werden können. Bei Elementbruch bestünde dann keine Diskontinuität. Aber auch hier bestünde wegen der Stochastizität der Versagensgrenzwerte das Problem, daß jederzeit einzelne Elemente im ungeschädigten, also aufsteigenden Bereich der Kraft-Separationskurve (oder σ - ε -Kurve), andere aber im geschädigten, und damit absteigenden Bereich iteriert werden müßten. Überdies ist auch hier fraglich, ob das Verfahren bis zum Probenbruch konvergent wäre.

Alle Materialgesetze, die nach Elementversagen einen absteigenden Bereich mit endlicher Ableitung aufweisen, haben überdies den Nachteil, daß damit kaskadenartige Bruchvorgänge

nicht simuliert werden können. Denn kleine Überschreitungen des Kraftmaximums brechender Elemente benötigen zusätzliche Verschiebungsinkremente, damit weitere Elemente Zusatzbelastungen infolge von Kraftumlagerung erfahren, wodurch das spröde Materialverhalten, das durch plötzlichen Reaktionskraftverlust gekennzeichnet ist, nicht wiedergegeben wird.

4.2.10 Visualisierung von Daten

Die am häufigsten benötigten numerischen Ergebnisse der Finite-Elemente-Rechnungen, wie etwa die makroskopische Zugkraft und die Anzahl der gebrochenen Elemente, werden bereits während des Rechenlaufs in tabellarischer Form in eine Datei geschrieben, mit der sich gleichzeitig der Fortschritt einer Rechnung verfolgen läßt. Für eine einzelne Rechnung lassen sich hiermit x-y-Plots der Lastgeschichte anfertigen.

Für ein Ensemble von mehreren Rechnungen, für die jeweils ein eigener (geeignet benannter) Datensatz der Belastungsgeschichte vorhanden ist, lassen sich aus jedem dieser Datenfiles einzelne Zeilen – z. B. die Zeile der Laststufe, bei der die Reaktionskraft maximal ist – herausuchen und für das ganze Ensemble in einer neuen Datei zusammenfassen, anschließend sortieren usw. Auf diese Weise wurden die diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer Probenserie gewonnen.

Zur Beurteilung des Ablaufs und der Ergebnisse einer Finite-Elemente-Rechnung sind aber einzelne numerische Werte oftmals nicht ausreichend. Größere zueinander gehörige Datenmengen, wie etwa die Verschiebungs- oder Spannungsverteilung in einer Modellprobe können numerisch praktisch nicht analysiert werden. Die Möglichkeit der visuellen Darstellung netzabhängiger Daten wie Spannungen oder Verschiebungen ist deshalb unabdingbar. Eine Möglichkeit dazu wäre, diese Daten so aufzubereiten, daß sie mit vorhandenen Darstellungsprogrammen für Finite-Elemente-Programme (z. B. ABAQUS-POST⁷) darstellbar sind. Leider ist die Schnittstelle für ABAQUS-POST binär und die Schnittstellenbeschreibung ist nicht öffentlich zugänglich; ein Plotprogramm mit bekannter Schnittstellenbeschreibung war hingegen nicht verfügbar⁸. Um trotzdem netzabhängige Daten darzustellen, wurden die graphischen Fähigkeiten des Programms MATHEMATICA⁹ genutzt (siehe [86]).

MATHEMATICA kennt graphische Primitiven wie geschlossene Polygonzüge, deren Eckkoordinaten als Listen angegeben werden. Diese können mit oder ohne Rahmen mit beliebigen Farben gefüllt werden. Die Farbcodierung kann als `RGBColor[r,g,b]` angegeben werden, wobei Werte für die drei Grundfarben, rot, grün und blau, mit einer jeweiligen Abstufung im Bereich von 1 bis 255, anzugeben sind. Darüberhinaus gibt es als Farbanweisung eine Graustufung von 0 bis 1 (entsprechend schwarz bis weiß). Weiterhin besteht die Möglichkeit, eine komplette Befehlskette aus einer Datei einlesen zu lassen.

Um diese Möglichkeiten zu nutzen, wurde eine Schnittstelle zur Restart-Datei des selbst entwickelten FE-Programms gestaltet. Das Einlesen der Daten war bereits im Programm implementiert, so daß lediglich eine Ausgabeoption herzustellen war. Aus den Koordinaten der Knoten, ihren Verschiebungen und einem Vergrößerungsfaktor für die Verschiebungen konnte für jedes Element ein ungefülltes Polygon seiner aktuellen (überhöhten) Eckkoordinaten erzeugt werden. Zusätzlich konnte jedes Element an den Rändern einmal geteilt und entsprechend der Einflußzonen der Integrationspunkte konnten 4 farblich gefüllte Polygone erzeugt

⁷ABAQUS-POST ist eine graphische Oberfläche des Finite-Elemente-Programmpakets ABAQUS[®] der Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc, Pawtucket, RI, USA. Bei Versionen ab ABAQUS-6 wurde diese durch das Programm ABAQUS-VIEWER abgelöst.

⁸Ein solches Programm wäre etwa das Programm PLOTFEM der Firma IWIS, Berlin.

⁹MATHEMATICA[®] ist ein Programm der Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, USA

werden. Als Farbabstufungsparameter wurden Spannungskomponenten gewählt. Zur Farbgebung wurden den gewählten Spannungskomponenten durch lineare Funktionen Werte von c_1 bis c_2 für die Farbparameter r , g oder b zugeordnet, wobei der Bereich c_1 bis c_2 vollständig im Bereich 1 bis 255 liegen mußte. Durch Kombinationen gegenläufiger Funktionswerte konnten abgestufte Farbänderungen, z.B. von rot nach blau, erzielt werden. Die Anweisungen für die Erzeugung aller Polygone (der ungefüllten Elemente und 4 Farbflächen pro Element) wurden unter Berücksichtigung der MATHEMATICA-Syntax in eine Datei geschrieben, die dann ausgeführt werden konnte. Abbildungen 10.66 bis 10.67 (Seiten 170 f) wurden auf diese Weise erzeugt, während bei den Abbildungen 10.14 und 10.16 (Seiten 142 und 143) nur eine Farbe gemäß der mittleren Elementspannung pro Element erzeugt wurde.

Kapitel 5

Zusammenfassung von Ergebnissen der Fasermodelle

Bereits in Kapitel 1.2 wurden die Körner des Werkstoffs als kleinste gerade noch homogene Gefügeeinheit beschrieben. Dabei werden die Fluktuationen der Korneigenschaften auf statistisch beschriebene Versagensgrenzwerte reduziert. Die Träger der diskret generierten, stochastischen Festigkeiten sind im Bündel(ketten)modell die Fasern. Die Skalierung der Fläche des Probenkörpers auf das Modell erfolgt damit über die Anzahl der im Werkstoff anzutreffenden Körner und wird im Modell durch die Anzahl der Fasern ($N \times M$) wiedergegeben. Dabei repräsentiert N die Zahl der Fasern der einzelnen Bündel, die Probenbreite, M die Zahl der Bündel in der Kette, die Probenlänge. Das Kapitel befaßt sich mit einigen allgemeinen Ergebnissen der Fasermodelle, die in Hinblick auf einen Vergleich mit FE-Modellen von Bedeutung sind.

5.1 Bündeltheorie und kleine Bündel bei ELS

Nach den Ergebnissen von Daniels [19] lassen sich die statistischen Eigenschaften großer Bündel bei gleichmäßiger Lastverteilung allein aus der Kenntnis der Grundverteilung der Faserspannungen bestimmen. Für Bündel endlicher Größe ist dies lediglich als asymptotische Näherung anzusehen, während nicht bekannt ist, ab welcher Bündelgröße das Bruchverhalten hinreichend genau gegen das asymptotische Verhalten konvergiert [38].

Mittels der numerischen Berechnung von Modellbündeln, deren Faserbelastbarkeiten in Übereinstimmung mit einer gewählten Grundverteilung generiert wurden, soll nun festgestellt werden, inwieweit sich diese entsprechend der Theorie für unendlich große Bündel verhalten. Zur Untermauerung des statistischen Aspekts wurden jeweils 100 nominell gleiche Bündel unterschiedlicher Größe generiert, also je 100 Bündel mit jeweils gleicher Faseranzahl mit individuellen Grenzfestigkeiten der gleichen Grundverteilung. Jedes Bündel wurde dann so lange verschiebungsgesteuert gezogen, bis alle Fasern gerissen waren. Dabei wurde in jedem Lastinkrement das Kräftegleichgewicht zwischen den Faserspannungen und der Bündelkraft, Gl. (4.1), eingehalten. Auf dieser Grundlage ist es sowohl möglich, eine Überprüfung der Bruchspannungsverteilung vorzunehmen, als auch deren Schädigungsverhalten zu studieren, für welches bisher keine analytische Lösung formuliert wurde.

Ausgehend vom ungeschädigten Bündel mit N Fasern und $N_b=0$ ungebrochenen Fasern, wurde die Verschiebung des oberen Bündelrands nach und nach um jeweils einen solchen Betrag

erhöht, daß immer gerade eine weitere Faser oder mehrere Fasern gleichzeitig ihre Festigkeitsgrenze erreichen. In einem weiteren Schritt ohne Steigerung der äußeren Verschiebung wurde deren Durchbruch festgestellt und gleichzeitig die Umlagerung der dabei freiwerdenden Kräfte auf bislang ungerissene Fasern berechnet. Aus der Vorstellung heraus, daß bis direkt vor Erreichen der entsprechenden Verschiebung die reißende Faser noch intakt ist und direkt nach ihrem Riß die Bündelzugkraft entsprechend verringert ist, wurden je Fasერი zwei Werte für die Bündelkraft ausgegeben, wodurch sich ein Zick-Zack-Verlauf bei der Bündelkraft ergibt. (Vgl. Abbildung 5.1(a), Seite 80, und Abbildung 10.17 auf S. 144.) Die maximale Bündelkraft und die zugehörige Anzahl gebrochener Fasern kann direkt aus der Ausgabe des Berechnungsprogramms [65] herausgelesen werden. Damit lassen sich die maximale Bündelspannung und die Spannungen der verbliebenen Fasern berechnen.

Als Grundverteilung für die Fasergrenzspannungen wurde als einfache asymmetrische Verteilungsfunktion eine Approximation an eine WEIBULL-Funktion, wie sie in Abschnitt 3.4 gezeigt wurde, angenommen. Es wurden Bündelgrößen von $N=10, 100, 1000$ und zusätzlich 1 Million Fasern verwendet. In Abschnitt 5.1.1 wird zunächst deren Bruchspannungsverteilung mit der Theorie nach Daniels verglichen. In Abschnitt 5.1.2 wird dann deren Schädigungsverhalten genauer untersucht.

5.1.1 Bruchspannungen

Tabelle 5.1 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen der kleineren Bündel ($N=10, 100$ und 1000) im Vergleich zur Theorie von Daniels. Tabelle 5.2 zeigt die Ergebnisse der breiten Bündel mit 1 Million Fasern.

Nach der Theorie hängen der Erwartungswert der Faserspannung bei der die maximale Bündelspannung auftritt, σ_f^t , und die mittlere maximale Bündelspannung, $\bar{\sigma}_B$, nicht von der Anzahl der Fasern ab. Bei den Modellproben hingegen zeigt sich bei beiden Werten eine starke Verschiebung je kleiner N ist. Während bei $N=1000$ der Mittelwert der Faserspannung aus 100 Rechnungen, bei der jeweilige Proben ihre maximale Bündelkraft erreichen, mit 1439 nahe dem theoretischen Wert von 1429 liegt, nimmt dieser Wert bei kleineren Bündeln deutlich zu. Auch der mittlere Wert der maximalen Bündelspannung, $\bar{\sigma}_B$, liegt bei $N=1000$ mit 1057 sehr nahe beim theoretischen Wert 1050, während er sich bei abnehmender Faserzahl deutlich nach oben bewegt. Dies bedeutet, daß sich der Scheitelpunkt der Kurve $\bar{\sigma}_B(\sigma_f^t)$ bei abnehmender Faserzahl sowohl zu größeren Faserspannungen als auch zu größeren Bündelfestigkeiten bewegt, was in der asymptotischen analytischen Lösung keine Entsprechung findet. Die Streuung der maximalen Bündelspannung bei Bündelbruch, φ_B , hingegen, entspricht bei allen Bündelgrößen in etwa den Erwartungen.

Es fällt außerdem auf, daß die Extrema der Faserspannungen, bei denen Bündelbruch eintritt, σ_f^t , nicht von den Proben herrühren, bei denen die Extremwerte der Bündelbruchspannungen auftreten. Abbildung 10.18 (auf Seite 144) zeigt die Verteilung der Werte für die Faserspannungen zum Zeitpunkt des Bndelbruchs, σ_f^t , und die zugehörigen Bndelspannungswerte, σ_B .

In Abbildung 10.19 auf Seite 145 werden für dieses Beispiel die kumulativen Verteilungsfunktionen der Bündelbruchspannungen, $\Omega(\sigma_B)$, nach der asymptotischen Theorie von Daniels, Gl. (4.15), mit den zugehörigen Verteilungen der berechneten Bruchspannungen der Modellproben, wie in Kapitel 3.2 beschrieben, verglichen. (Für die Verteilungsfunktionen aus der asymptotischen Theorie werden der Erwartungswert, $\bar{\sigma}_B$, und die Standardabweichung, φ_B , des Beispiels aus Tabelle 5.1, Teil 1, für jede der 3 Bündelgrößen in Gl. (4.14) bzw.

Tabelle 5.1: Bündeltheorie und Modellbündel für verschiedene N

Verteilung der Faserbruchspannungen: $P(\sigma_f) = \left(\frac{\sigma_f - a}{c}\right)^p$

Parameter für das Beispiel: $a=400$, $c=5a=2000$, $d=0.5$; $p=1/d$ ($A_f = 1$)

1. Erwartungen

max Faserspannung	σ_f^t	Gl. (4.4)	1429.04
zugehörige Anzahl gebrochene Fasern N_b/N	$P(\sigma_f^t)$		26.5%
Erwartungswert der Bündelspannung	$\bar{\sigma}_B$	Gl. (4.11)	1050.73
Standardabweichung der Bündelspannung	φ_B	Gl. (4.13)	$630.48/\sqrt{N}$
für $N =$	10	100	1000
$\varphi_B =$	199.37	63.05	19.94

2. Ergebnisse Modellbündel

je Bündelgröße N : $I=100$ Modellproben

Bündelgröße	N	10	100	1000
max Bündelspannung	min von 100	865.99	947.49	1009.08
$\sigma_B^{\max} = F_B^{\max}/N$	max von 100	1611.35	1199.37	1101.80
	MW ($=\bar{\sigma}_B$)	1215.37	1089.52	1057.74
	zugehörige N_b	3=30%	25=25%	320=32%
(Anzahl gebrochene Fasern)	zu min	1=10%	27=27%	238=24%
zugehörige Faserspannung	zu min	1237.13	1263.32	1483.94
$\sigma_f^{\max} = F_B^{\max}/(N - N_b)$	zu max	1790.39	1642.97	1445.94
	Standardabweichung von σ_B			
$\varphi_B = \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_i (\sigma_B^{\max,i} - \bar{\sigma}_B)^2}$		178.58	58.47	19.95
Faserspannung von σ_B	min von 100	938.55	1198.98	1269.82
σ_f^t	max von 100	2126.29	1711.10	1578.35
	MW	1529.35	1458.27	1439.67
	zugehörige N_b	0=0%	17=17%	195=20%
(Anzahl gebrochene Fasern)	zu min	4=40%	33=33%	324=32%
zugehörige Bündelspannung	zu min	938.55	986.86	1022.20
σ_B	zu max	1275.78	1146.43	1066.96
	Standardabweichung von σ_f^t, φ_f	272.13	109.12	63.04
N_b bei Bündelbruch	min von 100	0=0%	13=13%	195=19.5%
	max von 100	5=50%	39=39%	342=34.2%
	MW	19.10%	24.96%	26.40%
Standardabweichung von N_b, φ_b		12.64%	5.85%	3.18%

Gl. (4.15) eingesetzt. Für die kumulative Verteilung der 3 Modellprobenserien werden für jede Modellprobenserie die 100 ermittelten Bündelbruchspannungswerte zuerst sortiert, so daß $\sigma_{B1} \leq \dots \leq \sigma_{Bi} \leq \dots \leq \sigma_{B100}$ gilt, und diesen dann entsprechend Gl. (3.37) die Versagenswahrscheinlichkeit $\Omega_i(\sigma_{Bi}) = (i - 0.5)/100$ zugeordnet.) Durchgezogene Linien bedeuten dabei Verteilungsfunktionen $\Omega(\sigma_B)$ aus der asymptotischen Theorie, die sich alle im Punkt $(\bar{\sigma}_B, 0.5)$ schneiden, und die einzelnen Punkte sind die Ergebnisse der 3 mal 100 Rechnungen mit statistisch erzeugten Faserbruchspannungen. Während die roten Kurven für $N=1000$

Tabelle 5.2: Superbündel mit 1 Million Fasern

Verteilung der Faserbruchspannungen: $P(\sigma_f) = \left(\frac{\sigma_f - a}{c}\right)^p$ Parameter für das Beispiel: $a=400$, $c=5a=2000$, $d=0.5$; $p=1/d$ ($A_f = 1$)

	min	max	MW	SA
Bündelspannung	1049.3	1052.4	1050.9	0.66
Faserspannung	1415.2	1442.8	1429.8	5.87
Schädigung	25.8%	27.1%	26.5%	0.30%

recht gut miteinander übereinstimmen, ist bei den anderen eine deutliche Verschiebung der „experimentellen“ Werte nach rechts zu sehen, was der Verschiebung des Mittelwertes der Bündelbruchspannung, $\bar{\sigma}_B$, gegenüber dem vorausgesagten Wert entspricht. Die Steigungen der Kurven, die den Streuungen φ_B entsprechen, liegen für gleiche N annähernd parallel. Auffallend ist hier, daß die „experimentellen“ Kurven sich alle bei $\sigma_B = \bar{\sigma}_B$ in einem Punkt ($\Omega(\sigma_B) \approx 0.15$) zu schneiden scheinen.

Um eine Erklärung für die Zunahme des Mittelwertes der Bündelspannung und der Faserspannung zum Zeitpunkt der maximalen Bündelspannung bei abnehmender Bündelgröße zu finden, wird der Extremfall eines Bündels betrachtet, welches nur aus einer einzigen Faser besteht. Der Erwartungswert für die Grenzfestigkeit dieser einen Faser kann mit

$$\bar{\sigma}_f = \int_a^{a+c} \sigma_f p(\sigma_f) d\sigma_f = \int_a^{a+c} \sigma_f \frac{\partial}{\partial \sigma_f} (P(\sigma_f)) d\sigma_f \quad (5.1)$$

gefunden werden; für die Werte des Beispiels ist $\bar{\sigma}_f = 13/3 a = 1733.3$. Die Bündelspannung ist dann gleich der Faserspannung. Die Varianz der Faserspannung und damit der Bündelspannung ist durch

$$\varphi_1^2 = \int_a^{a+c} \sigma_f^2 p(\sigma_f) d\sigma_f - \bar{\sigma}_f^2 \quad (5.2)$$

gegeben, und man erhält für die Werte des Beispiels eine Streuung von $\varphi_1 = \sqrt{25/18} a = 471.4$. Die Verteilungsdichte, $\omega(F_B)$, für den Extremfall $N=1$ ist dann natürlich nicht mehr durch eine Normalverteilung sondern durch die Verteilungsdichte der Grundverteilung und die kumulative Verteilung, $\Omega(F_B)$, durch die Grundverteilungsfunktion, $P(\sigma_f)$, gegeben. In Abbildung 10.20 ist die kumulative Grundverteilung für die Versagensspannungen von 100 generierten „1-Faser-Bündeln“ der theoretischen kumulativen Verteilung unter der Annahme einer Normalverteilung gegenübergestellt. Die Normalverteilung erreicht beim maximalen Faserspannungswert 2400 erst eine kumulative Wahrscheinlichkeit von 0.92. Der Mittelwert der 100 generierten Werte ergibt mit dem Wert 1736.18 fast den theoretischen Wert, und die Streuung der generierten Werte ist mit 437.9 etwas geringer als zu erwarten wäre.

Bezieht man nun die vergleichsweise sehr großen Bündel aus Tabelle 5.2 in die Betrachtungen mit ein, wird zuerst offensichtlich, daß bei diesen Bündeln die Erwartungen bzgl. Mittelwert und Standardabweichung der Bündelspannung und bzgl. mittlerer Faserspannung bei Bündelbruch schon recht gut wiedergegeben werden. Bei genauerem Hinsehen wird aber sehr schnell deutlich, daß die Konvergenzgeschwindigkeit gegen die asymptotische Lösung recht bescheiden ist. Der relative Fehler bei der Standardabweichung nimmt bei den „Superbündeln“ gegenüber

den Bündeln mit $N=1000$ sogar zu, während der relative Fehler der mittleren Bündelspannung und der Faserspannung bei Bündelbruch eher auf ein Verhalten hindeutet, welches eine Zehnerpotenz mehr Genauigkeit bei einer Quadratur der Faseranzahl liefert.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß Übereinstimmung mit der asymptotischen Lösung recht langsam erfolgt, wenn die Faseranzahl vergrößert wird, und daß erst bei Bündelgrößen ab ca. $N=1000$ eine annähernde graphische Übereinstimmung im mittleren Bereich der Verteilungsfunktion mit den Ergebnissen aus der Theorie für große Bündel erreicht wird. Das Verhalten kleinerer Bündel hingegen nähert sich dem Grenzwert des einfasrigen Bündels an, was eine Erhöhung der Bündelfestigkeit bei gleichzeitiger Zunahme der Faserspannung zum Zeitpunkt der Bündelmaximalspannung bedeutet. Die Annahme einer Normalverteilung der Bündelmaximalspannungen wird dabei mit abnehmender Bündelgröße immer fragwürdiger.

5.1.2 Faserspannungen und Schädigung

Sowohl die Anzahl der bei Bündelbruch gerissenen Fasern, wie auch die Spannung, die die einzelnen Fasern bei Bündelmaximallast aufweisen, wird in den theoretischen Abhandlungen über das klassische Bündelmodell praktisch nicht behandelt. Für den asymptotischen Grenzfall sind diese Werte zwar durch die Lösung von Daniels [19] bestimmt, da für diesen Fall die Spannungen der Fasern durch Gl. (4.4) gegeben sind und damit auch die Anzahl der gerissenen Fasern durch die kumulative Verteilung der Faserspannungen bei Bündelbruch, $P(\sigma_f^t)$. Dieser Wert enthält aber keine Streuung und spiegelt somit die Realität bei endlichen Bündelgrößen nur unzureichend wieder. Die einzigen Arbeiten, die sich wenigstens indirekt diesem Thema nähern, sind die Herleitungen von Hansen et al. über die Verteilungsfunktionen gleichzeitig auftretender Faserrisse in Bündeln [37, 42, 51], die für die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit aber ohne praktische Bedeutung sind. Die vorliegende Arbeit wird zunächst das Verhalten der Bündel analysieren und damit zeigen, daß die Lösung des Problems nicht trivial ist. Als ingenieurmäßige Näherung werden dann empirisch gefundene Werte gezeigt.

Definiert man die Schädigung b eines Bündels als Quotient der Zahl der gerissenen Fasern, N_b , bezogen auf die Gesamtanzahl der Fasern

$$b = N_b/N, \quad (5.3)$$

kann man in Anlehnung an die Nomenklatur für die Faserspannungen die Schädigung zum Zeitpunkt der maximalen Bündelspannung mit b^t bezeichnen und erhält die mittlere maximale Bündelspannung Gl. (4.9) als Beziehung zwischen der Faserspannung bei Bündelbruch, σ_f^t , und der entsprechenden Schädigung zu

$$\bar{\sigma}_B = \sigma_f^t(1 - b^t). \quad (5.4)$$

Damit ergibt sich, daß der Mittelwert der Schädigung für den asymptotischen Grenzfall die Wahrscheinlichkeit $P(\sigma_f^t)$ für das Auftreten des Erwartungswertes der Faserspannung ist, bei der die Bündelspannung maximal wird.

Eine Beziehungsgleichung für die Streuung der Schädigung, bei der die Bündelspannung maximal wird, φ_b , läßt sich daraus leider nicht ableiten. Um das Schädigungsverhalten zu verstehen, lohnt es sich aber, eine kurze akademische Betrachtung der Zusammenhänge zwischen Bündelspannung, Faserspannung und Schädigung anzustellen.

Zeichnet man die Bündelspannung σ_B als Raumfläche $\sigma_B = \sigma_f(1 - b)$ der beiden Koordinaten Faserspannung und Schädigung, ergibt sich eine etwa kegelförmige Fläche (Abbildung 10.21

auf Seite 146). Diese Raumfläche ist unabhängig von der gewählten Grundverteilung $P(\sigma_f)$ der Faserspannungen. Bei $b=1$ besitzt diese eine Schnittgerade mit der Grundebene. Ihre gedachte Verlängerung unter den Definitionsbereich liefert auch bei $\sigma_f=0$ eine Schnittgerade mit der Grundfläche, während sie bei $\sigma_f=\min \sigma_f$ nur bei $b=1$ die Grundfläche schneidet. Legt man Ebenen gleicher Bündelspannung durch diese Raumfläche und projiziert ihre Schnittlinien mit der Bündelspannungsfläche auf die Grundfläche erscheinen diese Höhenlinien als gekrümmte Kurven, die in Abbildung 5.1(b) gezeigt sind.

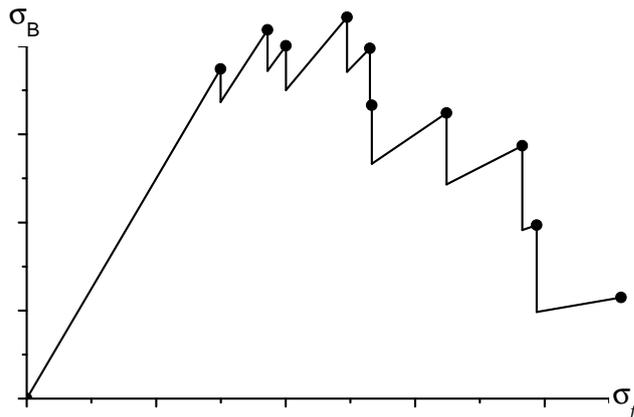
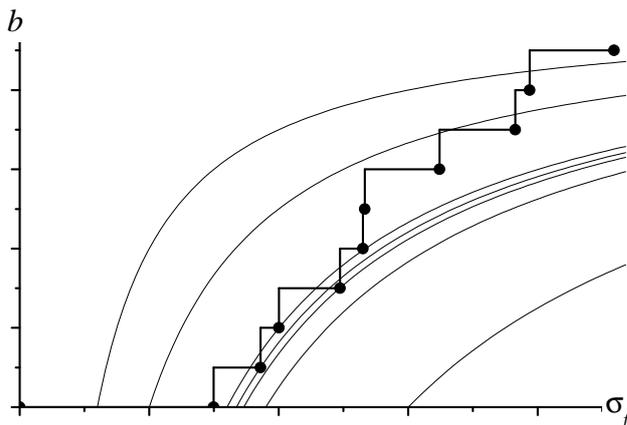


Abbildung 5.1: Zusammenhang zwischen Faserspannung, σ_f , Schädigung, b , und Bündelspannung, $\sigma_B = \sigma_f(1 - b)$:

(a) Bei Bruch einer Faser erfolgt ein Sprung in der Bündelspannung bei Festhalten der Faserspannung.



(b) Das Absinken der Bündelspannung ist durch einen Sprung in Schädigungsrichtung gekennzeichnet. (Die gekrümmten Linien sind Höhenlinien konstanter Bündelspannung.)

Die gewählte Grundverteilung $P(\sigma_f)$ entspricht einer Kurve auf der Grundebene, die im Fall der hier benutzten Funktion eine zu den Höhenlinien gespiegelte Krümmung aufweist. Die Projektion der Schnittlinie der mittleren Bündelspannung, $\bar{\sigma}_B$, berührt die Wahrscheinlichkeitsfunktion im Punkt (σ_f^t, b^t) . Zeichnet man die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Höhenlinien der Bündelspannungen des Varianzbereichs $\bar{\sigma}_B \pm \varphi_B$ für eine bestimmte Bündelgröße (hier: $N=100$) in ein Diagramm (Abbildung 10.22 auf S. 146), sieht man, daß die untere Grenze, $\bar{\sigma}_B - \varphi_B$, die Verteilungsfunktion zwei mal schneidet, während die obere Grenze, $\bar{\sigma}_B + \varphi_B$, die Verteilungsfunktion nicht berührt.

Verfolgt man den Weg von der Lastfreiheit über die maximale Bündellast zum Bündelbruch (bei Verschiebungssteuerung), stellt man fest, daß nicht jeder der möglichen Bündelspannungswerte der Raumfläche auf diesem Weg liegt, sondern nur solche, die in einem Streuband um die Grundverteilung für die Faserspannung angeordnet sind (vgl. Abbildung 10.23). Die Bündelkraft durchläuft dabei eine Zickzackkurve (Abbildung 5.1) auf der Raumfläche der Funktionswerte von σ_f und b . Projiziert auf die Grundfläche aus Faserspannung und Schädigung

gung ist die Bewegung immer abwechselnd parallel und senkrecht zur Faserspannung, wobei das lokale Maximum vor Absinken der Bündelspannung bei Riß einer Faser den jeweiligen Endpunkt in Faserspannungsrichtung darstellt, bevor ein Sprung in positiver Schädigungsrichtung erfolgt. Abbildung 5.1 zeigt diesen Verlauf qualitativ.

Da zu jeder Bündelspannung ein Wertepaar (σ_f, b) gehört, kann man nun auch zu allen lokalen Maxima, die in Abbildung 5.1 mit einem dickeren Punkt gekennzeichnet sind, ihre Projektionen auf die Grundfläche einzeichnen. Macht man dies für alle 100 Rechnungen der Bündelgröße $N=100$ aus Tabelle 5.1, wie in Abbildung 10.23 gezeigt, läßt sich die Ausdehnung dieses Streubandes erahnen.

In dieses Streuband eingezeichnet sind als dickere dunkelgrüne Punkte, die Wertepaare, bei denen jede dieser 100 Modellproben ihr Maximum der Bündelspannung erreicht hat. In Abbildung 5.1(b) entsprechen diese jeweils dem Punkt, der die am weitesten rechts liegende Höhenkurve gerade trifft. Abbildung 10.24 zeigt diese Punkte für die verschiedenen Bündelgrößen. Man sieht, daß sie nahe dem Erwartungswertepaar $(\sigma_f^t=1429, b^t=0.265)$ etwa in einem senkrecht zur Grundverteilungsfunktion ausgerichteten hyperbelförmigen Bereich streuen. Die besondere Schwierigkeit bei der theoretisch-analytischen Behandlung dieser Streuung wird anhand der blauen Punkte für die kleinste Bündelgröße deutlich: wegen der diskreten Werte, die die Schädigungen annehmen können, ist der Definitionsbereich nicht kontinuierlich.

Eine theoretische Herleitung für die Verteilungsfunktionen der Faserspannungen und Schädigungen und damit auch für deren Streuung kann hier nicht durchgeführt werden. Es ist allerdings möglich, mit den Werten der berechneten Modellproben, wenigstens eine empirisch ermittelte Verteilung der beiden Parameter anzugeben.

In Abbildung 10.25 und Abbildung 10.26 auf Seite 148 sind die Verteilungen der Faserspannungen, $\Omega(\sigma_f)$, bzw. der Schädigungen, $\Omega(b)$, zum Zeitpunkt der maximalen Bündelspannung für die Modellproben aus Tabelle 5.1 wiedergegeben. Die durchgezogenen Verteilungsfunktionen sind normalverteilt, wobei für den Mittelwert und die Standardabweichung die empirisch ermittelten Werte aus Tabelle 5.1 eingesetzt wurden. In Abbildung 10.25 wurden zur Orientierung zusätzlich die Grundverteilung und die ermittelten Verteilungen der Bündelbruchspannungen (wie in Abbildung 10.19 als blaue, grüne und rote Punkte) miteingezeichnet, während die Verteilungen der Faserspannungen gekreuzt dargestellt sind.

5.2 Bündelketten endlicher Breite bei ELS

5.2.1 Bruchspannungen

Es wurde bereits gezeigt, daß die Verteilungsfunktion Gl. (4.14) der Bündelspannungen, $\Omega(\sigma_B)$, nur für große Bündel gültig ist und bei kleinen Bündeln erhebliche Abweichungen von dieser asymptotischen Lösung auftreten. Die Bruchspannungsverteilung kleiner Bündel kann aber empirisch ermittelt werden. Dahingegen gilt der *weakest-link*-Effekt näherungsweise für Ketten beliebiger Kettenlänge, wie in Kapitel 4.1.2 gezeigt werden konnte.

Will man die Bruchspannungsverteilung $\Lambda(\sigma_C)$, Gl. (4.27), für beliebige Bündelketten $N \times M$ ermitteln, wird man wegen der Abweichungen bei schmalen Bündeln von ihrer asymptotischen Lösung mit der Näherungslösung Gl. (4.28) von Rosen nicht ans Ziel gelangen. Setzt man hingegen die empirisch ermittelte Lösung für die Bruchspannungsverteilung N -faseriger kleiner Bündel für die Bündelbruchspannungsverteilung $\Omega(\sigma_C)$ in Gl. (4.27) ein, kann man erwarten, eine gute Approximation der Bruchspannungsverteilung für die gesamte Bündelkette zu erhalten.

In Abbildung 10.27 (Seite 149) sind Ergebnisse von je 100 Modellproben der Bündelkettengrößen $N \times M = 10 \times 10$, 100×100 und 1000×1000 dargestellt (einzelne Punkte). Die Grundverteilung für die Faserfestigkeiten wurde wie für die Beispiele der Bündel in Tabelle 5.1 gewählt. Die Erwartungen für $\Omega(\sigma_C)$ wurden mit Gl. (4.27) berechnet, wobei für die Bündelbruchspannungsverteilung $\Omega(\sigma_C)$ Gl. (4.15) verwendet wurde. Die dabei benötigten Parameter $\bar{\sigma}_B$ und φ_B wurden nach der Bündeltheorie mit Hilfe von Gl. (4.11) und (4.13) bestimmt. Die sich so ergebenden Bruchspannungsverteilungen (gestrichelten Linien) sind in der Abbildung wegen ihrer strikten Bündelskalierungsvorschrift nach Daniels mit dem Index „ N “ gekennzeichnet.

Für die kleineren Bündel ($N=10$ und 100) wurden $\bar{\sigma}_B$ und φ_B zusätzlich aus Tabelle 5.1 in Gl. (4.15) eingesetzt und die daraus resultierenden Verteilungen $\Omega(\sigma_C)$ als dünne Linie geplottet. Wegen ihrer empirischen Grundlage wurden sie in der Abbildung mit dem Index „real“ gekennzeichnet. (Die signifikanten Werte der drei Modellbündelkettenserien sind in Tabelle 5.3 noch einmal zusammengefaßt.)

Tabelle 5.3: Modellbündelketten für verschiedene $N \times M$

Verteilung der Faserbruchspannungen: $P(\sigma_f) = \left(\frac{\sigma_f - a}{c}\right)^p$

Parameter für das Beispiel: $a=400$, $c=5a=2000$, $d=0.5$; $p=1/d$ ($A_f = 1$)

jeweils 100 Modellbündelketten

Systemgröße $N \times M$		10×10	100×100	1000×1000
max Systemspannung F_{BK}/N	min von 100	714.50	878.20	979.71
	max von 100	1171.28	1002.02	1012.88
	MW, $\bar{\sigma}_C$	929.77	942.60	996.89
Standardabweichung	φ_C	95.02	22.77	5.79
Schädigung $N_b/(N \times M)$	min von 100	2.0%	8.0%	13.5%
	max von 100	20.0%	15.4%	16.7%
	MW	10.0%	11.2%	15.0%
Standardabweichung	$\varphi_b \cdot 100$	3.9%	1.5%	0.6%

Werden die Erwartungswerte der resultierenden Verteilung für die Maximalspannungen der Bündelkette nach Gl. (4.30) unter Benutzung der empirisch in Kapitel 4.1.1 ermittelten Bündelbruchspannungskennwerte $\bar{\sigma}_B$ und φ_B für diese Beispiele – wie in Kapitel 4.1.2 durch numerische Integration – berechnet, ergeben sich die Werte $\bar{\sigma}_C = 940.57$ ($N \times M = 10 \times 10$), 942.65 ($N \times M = 100 \times 100$), 993.07 ($N \times M = 1000 \times 1000$), die von den vollständig empirisch ermittelten Werten in Tabelle 5.3 weniger als 1% abweichen.

Versucht man allerdings mit Hilfe dieses Erwartungswertes die Varianzen φ_C^2 , Gl. (4.31), und damit die Standardabweichung zu berechnen, so stellt man fest, daß das Ergebnis sehr empfindlich vom Wert von $\bar{\sigma}_C$ abhängt. Wird beispielsweise der Erwartungswert $\bar{\sigma}_C = 993.07$ in Gl. (4.31) eingesetzt und damit die Varianz berechnet, ergibt sich für die Bündelkette mit der Dimension $N \times M = 1000 \times 1000$ und der Grundverteilung des Beispiels eine Standardabweichung von 7.5. Wird der Erwartungswert nur geringfügig variiert und statt 993.07 993.00 eingesetzt, ergibt sich eine Standardabweichung von 14.0 und bei Benutzung von 993.10 wird die Standardabweichung bereits imaginär ($\sqrt{-3.61}$). Da aber die Ungenauigkeiten bereits bei der Bestimmung der Bündelfestigkeiten, also $\bar{\sigma}_B$ und φ_B , vorhanden sind und sich diese in der Bestimmung von $\omega(\sigma_B)$ fortsetzen, wird der berechnete Wert der Varianz so fraglich, daß

selbst seine Größenordnung praktisch wertlos wird. Es wird damit recht deutlich, daß selbst für dieses vergleichsweise recht einfache zu behandelnde Modell eine analytische Untersuchung an ihre Grenzen gelangt.

5.2.2 Faserspannungen und Schädigung

Zum Zeitpunkt des Bruchs eines der Bündel, aus denen die Bündelkette besteht, ist üblicherweise nicht in allen Bündeln die gleiche Anzahl von Fasern gerissen, so daß die Faserspannungen zu diesem Zeitpunkt von Bündel zu Bündel unterschiedlich sind, da jedes der Bündel die gleiche Last, nämlich F_{BK} , übertragen muß. Es gäbe also wenig Sinn, wenn man versuchen wollte, die Bündelkettenspannung bei Versagen der Bündelkette in Relation zu den Spannungen der einzelnen Fasern zu setzen.

Analog der Schädigung eines einfachen Bündels kann die Schädigung, b , einer Bündelkette mit

$$b = N_b / (N \cdot M) \quad (5.5)$$

definiert werden, wobei N_b die Gesamtanzahl der gerissenen Fasern der Bündelkette bei Systemversagen und $N \cdot M$ die Gesamtanzahl der Fasern ist.

Wie bereits für das einfache Bündel, gibt es auch für die Bündelkette keine analytische Lösung für die Verteilungsfunktion der Schädigung bei Bündelbruch. Um dennoch eine Vorstellung von dieser Verteilung zu bekommen und zu untersuchen, wieweit diese bezüglich unterschiedlicher Systemgrößen skalierbar ist, werden wiederum Modellbündelketten bezüglich ihrer Schädigung ausgewertet. Diese Untersuchung wird in Abschnitt 5.3.1 durchgeführt.

5.3 Skalenverhalten von Bündelketten bei ELS und LLS

5.3.1 Abhängigkeit von der Kettenlänge

In Abschnitt 5.2.1 wurde gezeigt, daß sich die Bruchspannungsverteilung einer Bündelkette bei gleichmäßiger Lastverteilung ermitteln läßt, indem die Bruchspannungsverteilung von Bündeln gleicher Breite mit Gl. (4.27) skaliert wird, also eine *weakest-link*-Skalierung des Kettenanteils der Bündelkette durchgeführt wird.

Es wurden nun Bündel der Breite $N=100$ Fasern mit einer normierten Grundverteilung der Verteilungsbreite $\zeta = c/a = 5$ nach Gl. (3.43) generiert ($M=1$). Danach wurden Bündelketten der gleichen Breite und verschiedener Länge mit der gleichen Grundverteilung erzeugt, wobei Kettenlängen $M=10, 50$ und 100 zum Einsatz kamen.

Es sollte untersucht werden, ob sich mit der Skalierungsvorschrift Gl. (4.27) auch die Schädigungsverteilung der Bündelkette ermitteln läßt. Darüberhinaus sollte untersucht werden, ob sich diese Skalierungsvorschrift auch bei nichtgleichmäßiger Lastverteilung innerhalb der Bündel verwenden läßt.

Hierzu wurde je ein Datensatz jeder Bündelkettengröße mit der *equal load sharing*-Regel, (ELS), und je einer mit einer *local load sharing*-Regel, (LLS), mit einem Reißspitzenlastkonzentrationsfaktor $f_{Rf} = 0.5$ berechnet, der für kurze Reißlängen in etwa die Lastverteilung eines GRIFFITH-Risses ergibt. Die Faserfestigkeiten aller Proben wurden dabei einzeln generiert, so daß jeweils 200 nominell gleiche Proben jeder Probengröße zur Hälfte mit einer der beiden Lastverteilungsregeln berechnet werden konnten.

Tabelle 5.4 zeigt die berechneten Mittelwerte (MW) und Standardabweichungen (SA) der je 100 Modellproben. Abbildung 10.28 auf S. 150 zeigt die Verteilung der Bruchspannungen

Tabelle 5.4: Bündelketten unterschiedlicher Länge, M , mit *equal* und *local load sharing*

$$\text{Verteilung der Faserbruchspannungen: } P(\sigma_f) = \left(\frac{\sigma_f - a}{c}\right)^p$$

Parameter für das Beispiel: $a=1$, $c=5a$, $d=0.5$; $p=1/d$ ($A_f = 1$)

alle Bündel: Breite $N=100$ Fasern

jeweils 100 Modellketten

Kettenlänge M	Bruchspannung $\sigma = F/N$		Schädigung, $b = N_b/(N \times M)$		
	MW	SA	MW	SA	
ELS	1	2.704	0.1428	0.2551	0.0562
	10	2.486	0.0806	0.1570	0.0276
	50	2.399	0.0604	0.1228	0.0160
	100	2.361	0.0563	0.1127	0.0135
LLS, $f_{Rf}=0.5$	1	2.316	0.1509	0.1213	0.0500
	10	2.074	0.0935	0.0721	0.0167
	50	1.954	0.0770	0.0515	0.0105
	100	1.915	0.0777	0.0473	0.0096

und Abbildung 10.29 die Verteilung der Schädigungen $b = N_b/(N \times M)$ der reinen Bündel für die beiden Lastverteilungsregeln. N_b ist hierbei die absolute Anzahl gerissener Fasern der gesamten Bündelkette bei Erreichen der makroskopischen Bruchspannung.

Wie zu erwarten war, besitzt die Bruchspannungsverteilung bei Lastgleichverteilung einen höheren Mittelwert ($\bar{\sigma}_B = 2.7$) als bei stärkerer Belastung der lokalen Reißspitzenfasern ($\bar{\sigma}_B = 2.3$). Bei den Schädigungen ergibt sich ein ähnliches Bild mit dem Unterschied, daß aufgrund der diskreten Möglichkeiten, die die Schädigung annehmen kann, sich ein deutlich abgestuftes Bild ergibt (ELS: $\bar{b} = 0.255$, LLS: $\bar{b} = 0.121$). Betrachtet man die numerischen Werte aus Tabelle 5.4, erkennt man, daß die Streuung beim Übergang von Lastgleichverteilung zu lokaler Lastverteilungsvorschrift bei den Bruchspannungen geringfügig zunimmt, bei den Schädigungen hingegen leicht abnimmt (ELS: $\varphi_B = 0.14$, $\varphi_b = 0.056$, LLS: $\varphi_B = 0.15$, $\varphi_b = 0.050$).

Ein sofortiges Durchbrechen der Modellproben bei Auftreten des ersten Mikrorisses erfolgt auch bei lokaler Lastverteilungsregel nicht, was sich in den minimalen Schädigungen von 0.05, also $N_b=5$, zeigt. Die durchgezogenen Linien zeigen die normalverteilten Ausgleichskurven nach Gl. (4.15) mit den ermittelten Mittelwerten und Standardabweichungen.

Skaliert man nun die diskreten Wahrscheinlichkeitswerte $P(\sigma_B)$ der Bruchspannungen der einfachen Bündel ($M=1$) mit Gl. (4.18) bzw. ihrer normalverteilten Approximationen nach Gl. (4.27) mit Gl. (4.28) auf Spannungsverteilungen für Bündelketten der Länge M , so ergibt sich für beide Lastverteilungsregeln eine recht gute Übereinstimmung mit den ermittelten Verteilungen der Modellbündelketten der entsprechenden Größen, wenn auch die Streuung für längere Ketten etwas unterschätzt wird. (Abbildung 10.30 zeigt die Ergebnisse der Modellbündelketten, die normalverteilte Approximationen der Ergebnisse der einfachen Bündel, $M=1$, und die skalierten Kurven der Approximation.)

Führt man die gleichen Skalierungen bei den Schädigungen durch, zeigen sich deutliche Ab-

weichungen zwischen den skalierten Verteilungen und den Verteilungen, die mit Bündelketten der entsprechenden Größen direkt gewonnen wurden. (Abbildungen 10.31 und 10.32 auf Seite 152 zeigen die an Bündelketten ermittelten Schädigungsverteilungen, die normalverteilten Ausgleichskurven der einfachen Bündel, $M=1$, und die auf $M=10$, 50 und 100 skalierten Ausgleichskurven von $M=1$; Abbildung 10.31 für ELS und Abbildung 10.32 für LLS.) Zum einen wird die Schädigung insgesamt falsch wiedergegeben: für die kürzeren Bündelketten ($M=10$) ist dies bei den Rechnungen mit ELS eine deutliche Überschätzung, die sich bei den längeren Ketten durch die höheren Exponenten weniger stark bemerkbar macht. Bei den Rechnungen mit lokaler Lastverteilungsregel zeigt sich dies durch extrem starke Unterschätzung des Mittelwertes. Zum zweiten wird die Streubreite bei beiden Lastverteilungsvorschriften deutlich überschätzt, was durch die flacheren Kurven der skalierten Approximationen (im Vergleich zu den direkt ermittelten Verteilungen) zum Ausdruck kommt.

Nimmt man hingegen die Bündelketten mit $M=10$ als Grundeinheit an und skaliert deren Schädigungsverteilung nach Gl. (4.25) auf die Größen der anderen Bündelketten, so zeigt sich bei den längeren Bündelketten, $M=50$ und 100, sehr gute Übereinstimmung der skalierten mit den direkt ermittelten Verteilungen, während nur die skalierte Verteilung auf die Größe der kleineren, einfachen Bündel, $M=1$, noch eine ausgeprägte Abweichung zur direkt ermittelten Schädigungsverteilung zeigt. (Abbildung 10.33 zeigt die gleichen an Bündelketten gewonnenen Schädigungsverteilungen wie Abbildung 10.31, dazu die normalverteilte Ausgleichskurve der Verteilung der Bündelkette mit 10 Schichten, $M=10$, und deren auf $M=1$, 50 und 100 skalierte Funktion für ELS, Abbildung 10.34 zeigt das Äquivalent für LLS.)

Über die Ursache, warum dieses Phänomen nur bei den Schädigungen auftritt, nicht aber bei den Bruchspannungen, kann gegenwärtig nur spekuliert werden. Es muß daher als Fazit festgestellt werden, daß eine gewisse Mindestkettenlänge als Referenz benötigt wird, will man mittels der *weakest-link*-Skalierungsmethode auch die Schädigung für große Bündelketten ermitteln. Dann allerdings scheint auch die Schädigungsverteilung einer *weakest-link*-Skalierungsvorschrift zu entsprechen, so daß das Verhalten langer Bündelketten zumindest auf das Verhalten kurzer Bündelketten zurückgeführt werden kann. Dies gilt unabhängig von der Lastverteilungsvorschrift.

5.3.2 Abhängigkeit von der Gesamtprobengröße

In Kapitel 4.1.1 wurden Autoren zitiert, die feststellen, daß sich bei einfachen Bündeln bei lokaler Lastverteilung ein *weakest-link*-Verhalten beobachten läßt, wenn die Zahl der Fasern pro Bündel größer als 9 ist. Wegen des in den vorangegangenen Abschnitten gezeigten *weakest-link*-Verhaltens der Bündelketten bezüglich ihrer hintereinander geschalteten Bündel sollte sich dann auch ein *weakest-link*-Verhalten des Gesamtsystems zeigen.

Um dieses Verhalten zu untersuchen wurden 2 unterschiedlich große Bündelketten generiert, die den Meßbereich der in Kapitel 2.2 beschriebenen Proben mit konstanter Breite repräsentieren, welche das Verhältnis Höhe:Breite von 5:1 aufweisen. Da die Körner des Werkstoffs als annähernd gleichseitig betrachtet werden können, bestehen die Proben aus fünf mal so vielen Körnern in Zugrichtung wie quer dazu. Wegen des Zusammenhangs zwischen den Körnern des Werkstoffs und den Fasern des Modells werden die Modellproben mit fünf mal so vielen Fasern hoch (M =Anzahl Bündel) wie breit (N =Anzahl Fasern pro Bündel) generiert, was zu einem $M:N$ -Verhältnis von 5 führt. Unterschiedlich große Bündelketten repräsentieren damit unterschiedlich große, ähnliche Proben gleichgroßer Mikrostrukturkomponenten. Die generierten Modellproben bestanden aus Bündeln der Breite $N=20$ und 40, womit sich Kettenlängen von $M=100$ und 200 Bündeln ergaben.

Für jede der beiden Probengrößen wurden 100 nominell gleiche Proben mit der Grundverteilung für die Faserfestigkeiten nach Gl. (3.44) mit $a=400$, $\zeta=c/a=5$ und $d=0.5$ erzeugt. Diese wurden jeweils mit der LLS-Regel Gl. (4.39) und einem Rißspitzenlastkonzentrationsfaktor $f_{Rf}=0.5$ berechnet.

Abbildung 10.35 auf Seite 154 zeigt die ermittelte Bruchspannungsverteilung und Abbildung 10.36 die Verteilung der Schädigungen bei Bruchlast. Die Verteilungen fallen dabei fast aufeinander, wobei die Verteilungen der größeren Proben geringfügig höhere Wahrscheinlichkeitswerte bei gleicher Bruchspannung bzw. Schädigung zeigen als die kleineren Proben.

Wird die Verteilung der größeren Probe punktweise mit der *weakest-link*-Skalierungsvorschrift Gl. (4.25) auf die kleinere Faseranzahl skaliert, also jeder Punkt P_i der Verteilung der großen Probe aus $40 \times 200 = 8000$ Fasern der Vorschrift

$$P_{skal\ 2000} = 1 - (1 - P_{8000})^{1/k} \quad (5.6)$$

mit $k=4$ unterworfen, ergeben sich die sternförmigen Punkte in den beiden Abbildungen. Es ist deutlich zu sehen, daß diese erheblich von der Verteilungskurve für die kleineren Proben abweicht.

Dieses Beispiel zeigt, daß die eingangs erwähnte Vermutung, das statistische Verhalten von Bündelketten bei LLS könne generell mittels einer *weakest-link*-Skalierung nach der Gesamtzahl der Fasern erfaßt werden, nicht bestätigt werden kann.

Zur genaueren Erfassung von Probengrößeneffekten wurden die Proben mit 20×100 und 40×200 Fasern um eine mittlere Probengröße von 30×150 Fasern ergänzt. Drei weitere Serien 100 nominell gleicher Proben mit den gleichen Probengrößen wurden außerdem mit der ELS-Regel berechnet. Alle Modellproben haben das gleiche Höhe-zu-Breite-Verhältnis $M:N=5$.

Tabelle 5.5 zeigt die Mittelwerte (MW) und Standardabweichungen (SA) und den jeweils kleinsten (min) und größten (max) Wert der Bruchspannungen und der Schädigungen. In Abbildung 5.2 sind die Mittelwerte und Standardabweichungen als Fehlerbalken in Abhängigkeit von der Faseranzahl dargestellt.

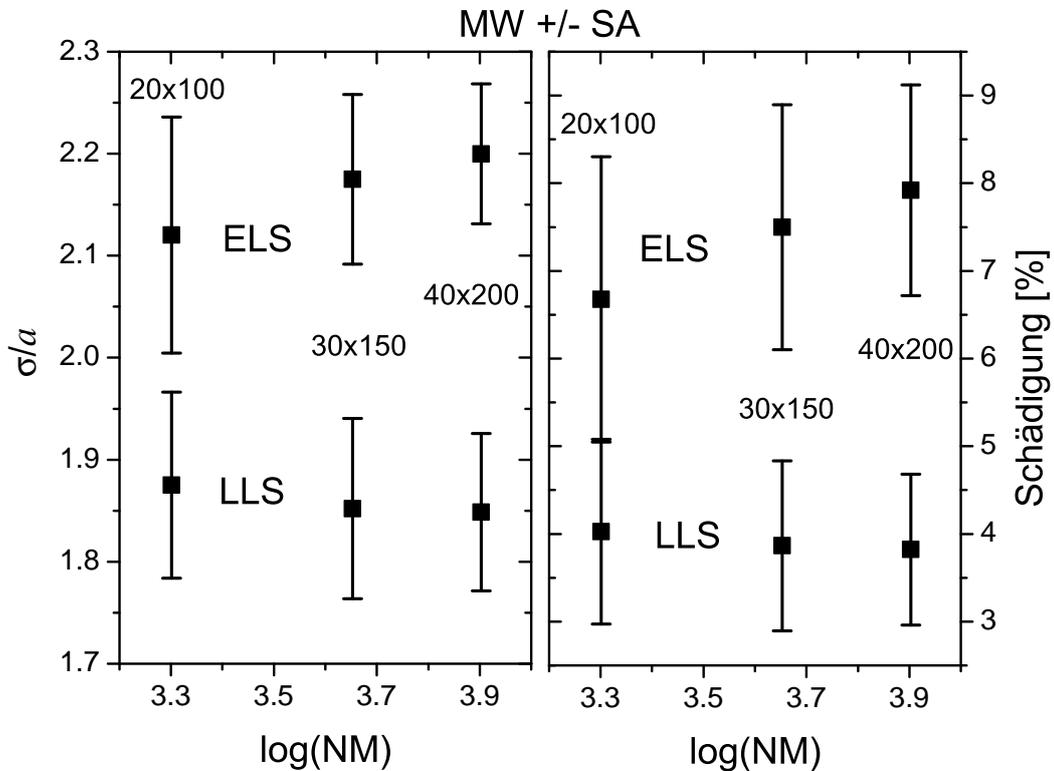
Tabelle 5.5: Größeneffekt von Bündelketten

Verteilung der Faserbruchspannungen: $P(\sigma_f) = \left(\frac{\sigma_f - a}{c}\right)^p$

Parameter für das Beispiel: $a=400$, $c=5a=2000$, $d=0.5$; $p=1/d$ ($A_f = 1$)

Probengröße $N \times M$		ELS			LLS, $f_{Rf} = 0.5$		
		20×100	30×150	40×200	20×100	30×150	40×200
Bruchspannung $F/(Na)$	norm. min	1.72	1.97	2.01	1.549	1.538	1.661
	max	2.34	2.32	2.36	2.064	2.045	2.048
	MW	2.12	2.17	2.20	1.875	1.852	1.849
	SA	0.12	0.08	0.07	0.091	0.088	0.077
Schädigung [%] $100N_b/(NM)$	min	1.95	4.60	5.19	1.50	1.64	2.11
	max	10.95	10.58	11.79	7.15	6.51	6.19
	MW	6.68	7.50	7.92	4.03	3.86	3.82
	SA	1.63	1.40	1.20	1.06	0.97	0.86

Abbildung 5.2: Größeneffekt: Mittelwert und Standardabweichung von Bruchspannung und Schädigung mit wachsender Elementanzahl bei ELS und LLS ($f_{Rf}=0.5$) (vgl. Tabelle 5.5).



Bei gleichmäßiger Lastverteilung innerhalb der Bündel ist sowohl bezüglich der Bruchspannung als auch der Schädigung ein Probengrößeneffekt deutlich erkennbar, bei dem mit zunehmender Faserzahl – und damit zunehmender Anzahl stochastisch generierter Festigkeiten – die mittlere Bruchspannung der Proben zunimmt, während die Streuung gleichzeitig abnimmt. Bei den Bruchschädigungen ist dieser Effekt sogar noch ausgeprägter. Allerdings sind die Zuwächse bei kleinen Faserzahlen größer als bei großen Faserzahlen. Die Abhängigkeit von der Probengröße scheint also für große Proben zu verschwinden.

Die Streuung nimmt mit zunehmender Probengröße nur sehr wenig ab. Simulationen mit sehr viel größeren Proben, deren Ergebnisse hier nicht gezeigt sind, ergeben eine nahezu konstante Streuung auch bei sehr großen Proben.

Bei der hier verwendeten lokalen Lastverteilungsregel ist ein leicht gegenläufiger Probengrößeneffekt für die Mittelwerte festzustellen, also ein Absinken des Mittelwerts bei Zunahme der Probengröße. Die Streuung nimmt auch für diesen Fall mit zunehmender Probengröße ab und verhält sich im übrigen ähnlich wie im Falle gleicher Lastverteilung.

In einer Untersuchung, bei der der Größeneffekt von Modellproben mit gleichmäßiger Lastverteilung (ELS) und einer schmalen Grundverteilung der Faserbelastbarkeiten ($c=2a$ mit $a=500$) mit dem FE-Modell verglichen wurden, zeigten sich für die Bündelkette die gleichen Größeneffekte wie in Abbildung 5.2, also ein Anstieg des Mittelwerts bei größeren Proben. (Vgl. dazu auch Kapitel 7.2 und Abbildungen 10.71 und 10.72.) Damit erscheint dieses Probengrößenverhalten als unabhängig von der gewählten Grundverteilung. Es stellt sich dann aber die Frage, wieso auf dem niederen Bruchspannungsniveau unterhalb von 700 MPa ein An-

steigen des Mittelwerts mit zunehmender Probengröße des Bündelkettenmodells überhaupt erfolgen kann. Verfolgt man nämlich die Mittelwerte der Bruchspannungen bei Festhalten des Verhältnisses $M:N=5$ zu immer kleineren Bündelkettengrößen, erreicht man schließlich eine reine *weakest-link*-Kette aus 5 hintereinandergeschalteten Fasern. Berechnet man den theoretischen Mittelwert für diese Konfiguration nach Gl. (4.22), ergibt sich ein Wert von etwa 869, der deutlich höher ist, als der für alle gezeigten Modellprobengrößen.

Um diese Ungereimtheit aufzuklären, wurden je 30 Rechnungen für Bündelketten der gleichen Grundverteilung ($a=500$, $\zeta=c/a=2$, $d=0.5$) und der Größen $N \times M=1 \times 5$, 2×10 , 3×15 , 5×25 und 10×50 durchgeführt und ihre mittleren Bruchspannungen und deren Streuungen zusammen mit den größeren Modellproben in ein Diagramm eingetragen (Abbildung 10.37 auf S. 155). Dabei zeigt sich, daß der Mittelwert der 30 Rechnungen der *weakest-link*-Kette praktisch exakt mit dem theoretisch ermittelten Wert (roter Kreis) zusammenfällt. Mit zunehmender Bündelkettengröße nimmt dann der empirisch ermittelte Spannungsmittelwert zuerst ab, erreicht dann offenbar zwischen 2×10 und 10×50 Fasern einen Tiefstpunkt und steigt dann wieder an, um erst dann asymptotisch zu konvergieren. Die Streuung hingegen ist bei der reinen Kette am größten und sinkt kontinuierlich ab.

Betrachtet man nun noch die prozentualen Schädigungen dieser Serie von Miniaturmodellproben, siehe Abbildung 10.38 (Seite 155), stellt man fest, daß sich diese völlig „normal“ verhalten: Die Schädigung bei maximaler Last der reinen Kette beträgt selbstverständlich null, eine Streuung ist dabei unmöglich. Ab der Größe 2×10 steigt der Mittelwert der Schädigung an, während die Streuung von zunächst 5% (± 1 Faser) kontinuierlich sinkt.

Kapitel 6

Ergebnisse von FE-Rechnungen

6.1 Überblick zu den Rechnungen mit den FE-Modellen

Bisherige Arbeiten, die sprödes Bruchverhalten von Kontinua unter dem Aspekt lokaler Bruchfestigkeiten auf mikrostruktureller Ebene zu erfassen versuchten, betrachteten entweder das statistische Verhalten unter Verwendung grob idealisierender Modelle, wie etwa der Faserbündelmodelle oder anderer einfacher Stabmodelle, oder begnügten sich damit, einzelne Aspekte des Bruchverhaltens diskreter Materialinhomogenitäten zu untersuchen, ohne die statistischen Aspekte weiterzuverfolgen. In dieser Arbeit wird versucht, den statistischen Aspekt mit einem an das reale Verhalten eines Kontinuums angepassten Modell zu verknüpfen. Die Verknüpfung des statistischen Aspekts eines lokalen stochastischen Modells im Rahmen einer Kontinuumsbeschreibung mit Finiten Elementen eröffnet ein weites Feld offener Fragen, die allenfalls ansatzweise in dieser Arbeit behandelt werden können. Die Herausforderung dieser Arbeit besteht somit weniger in einer umfassenden Erarbeitung aller Aspekte einer auf lokalen Inhomogenitäten basierenden Kontinuumsmodellierung, als vielmehr in der Beschränkung auf die statistischen Aspekte dieser Modellierung mit vereinfachten Modellen und der Vorstellung damit erzielter Ergebnisse.

Die mit der mikrostrukturellen Heterogenität verbundenen Annahmen und statistischen Effekte wurden schon in Kapitel 5 behandelt. Die Grundlage der Modellierung basiert weiterhin auf einem Zusammenhang zwischen mikrostruktureller Gefügestruktur mit stochastischen Festigkeitseigenschaften und Trägern dieser Eigenschaften im Modell, beim FE-Modell den Finiten Elementen. Die statistischen Effekte sind zum einen die Probengroßeneffekte der mittleren Bruchspannung, die dabei erreichten mittleren Schädigungsanteile und deren Streuungen bei unterschiedlicher Feinheit der Diskretisierung. Weiterhin ist dies die Form der resultierenden Verteilungsdichte bzw. ihrer kumulativen Verteilung. Als wesentliche Folge davon ist die Frage der Skalierbarkeit von großem Interesse.

Wesentliche Einschränkungen und Vereinfachungen der Methoden wurden bereits genannt und lassen sich in den folgenden Punkten noch einmal zusammenfassen:

- Beschränkung auf eine approximierete WEIBULL-Verteilung als Grundverteilung der diskreten Festigkeitswerte,
- Ignorieren geometrischer Zufälligkeiten, wie etwa Unterschiede in Größe und Orientierung von Körnern,

- stark vereinfachendes isotrop-elastisches Materialverhalten vor dem Elementversagen,
- Annahme kleiner makroskopischer Verzerrungen,
- Beschränkung auf ein makroskopisches Normalspannungskriterium als lokale Versagensbedingung und
- stark idealisierter, am Verhalten vom Faserbündelmodell orientierter, plötzlicher Versagensmechanismus der Elemente.

Als weitere Einschränkung werden nur Modellproben betrachtet, die ein mit den experimentell untersuchten Proben gemeinsames Höhen-zu-Breiten-Verhältnis aufweisen.

In diesem Kapitel wird zunächst ein Überblick zu den FE-Modellproben und ihren Belastungen gegeben und die Grundsätze beschrieben, nach denen die lokalen Festigkeiten generiert und die makroskopischen Antworten dargestellt werden. Da trotz aller Bemühungen, einen schnellen FE-Code zu entwickeln, die Rechenzeiten einen stark limitierenden, wesentlichen Einfluß ausüben, wird außerdem ein kurzer Abschnitt diesem Thema gewidmet.

In Abschnitt 6.2 werden Proben mit konstantem Querschnitt behandelt, wobei zuerst in Abschnitt 6.2.1 einige Erkenntnisse für das Kohäsivmodell vorgestellt und in Abschnitt 6.2.2 erste Ergebnisse von untaillierten Modellproben mit dem Modell, bei dem die Kontinuums-elemente versagen können, gezeigt werden. Daran anschließend werden die beiden Modelle im Abschnitt 6.2.3 miteinander verglichen.

Abschnitt 6.3 widmet sich Modellrechnungen von taillierten Flachzugproben mit dem Kontinuumsmodell. Zu Anfang werden die FE-Diskretisierung der verwendeten taillierten Proben erläutert und die zur Untersuchung verwendeten Probenmodifikationen zusammengefaßt. Daran anschließend wird in Abschnitt 6.3.3 kurz das allgemeine Verhalten der Modellproben beschrieben, wonach in den Abschnitten 6.3.4 und 6.3.5 die erzielten Ergebnisse in Bezug auf die Bruchspannungen und -schädigungen anhand von Abbildungen gezeigt werden. Diese werden in Abschnitt 6.3.6 durch eine Untersuchung über weit von der taillierten Probenmitte entfernt auftretende Risse ergänzt. Die Ergebnisse werden in Abschnitt 6.3.7 zusammenfassend interpretiert und um Vergleiche mit Ergebnissen von Rechnungen nichttaillierter Proben ergänzt.

In Abschnitt 6.4 schließlich erfolgt ein Résumé der Modellrechnungen und eine Diskussion der angewandten Modelle.

6.1.1 FE-Modellproben und ihre Belastung

Die Elementierung der Modellproben wurde in Kapitel 4.2.1 bereits detailliert vorgestellt. Bei Verwendung des Kohäsivgesetzes zur Modellierung von Mikrorissen wird die Probenmeßfläche abwechselnd durch Schichten unzerstörbarer Kontinuums-elemente und ausdehnungsloser Schichten von Kohäsiv-elementen diskretisiert. Auf M Schichten zu je N Kontinuums-elementen kommen dabei $M-1$ Schichten zu je $N+1$ Kohäsiv-elementen. Die Grenzbelastbarkeiten werden extern bereits für die Bündelketten erzeugt. Um diese unverändert übernehmen zu können, muß beachtet werden, daß diese Fasergrenzbelastungen als Faserspannungen einer Einheitsfaser der Querschnittsfläche 1 betrachtet wurden. Sollen die Kohäsiv-Grenzknotenkräfte, f_c , die Werte übernehmen, ohne ihr Spannungsäquivalent in gleicher Höhe zu verlieren, müssen die anliegenden Kontinuums-elemente eine Breite $L_x=1$ aufweisen. Aufgrund der Relation zwischen Probengröße und Anzahl statistisch generierter Festigkeiten, werden die Höhen der Kontinuums-elemente, L_y , ebenfalls in Einheitsgröße bestimmt, so daß die Kontinuums-elemente als

Einheitselemente der Größe $L_x=L_y=1$ generiert werden. Bei Verwendung von bruchfähigen Kontinuums-elementen zur Mikrorißmodellierung können die Elemente in ihrer tatsächlichen, in mm angegebenen Größe angegeben werden. Besonderheiten bei der Modellierung taillierter Modellproben werden in Abschnitt 6.3.1 behandelt.

Alle verwendeten FE-Netze orientieren sich an den verwendeten realen Flachzugproben aus Kapitel 2. Die Meßflächen der Proben mit konstanter Breite haben ein Geometrieverhältnis Höhe zu Breite = 5. Da die Körner des Werkstoffs als annähernd gleichseitig betrachtet werden können, bestehen die Proben aus fünfmal so vielen Körnern in Probenlängsrichtung wie quer dazu. Wegen des postulierten Zusammenhangs zwischen Korngrenzflächen des Werkstoffs und diskreten Festigkeiten, die im Modell durch jeweils ein Element mit individueller Belastbarkeitsgrenze repräsentiert werden, werden die Modellproben mit fünfmal so vielen Elementen hoch wie breit generiert wodurch die Probengrößen weiterhin durch ihre $N \times M$ -Größe, wie bereits die Bündelketten, charakterisiert werden können. Da allerdings eine Probe, die aus 20×100 Kontinuums-elementen besteht, wiederum 21×99 Kohäsivelemente und eine Probe mit 20×100 Kohäsivelementen 19×101 Kontinuums-elemente besitzt, kommen mitunter geringe Abweichungen von dieser 5:1-Regel zustande.

Die Fesselung des Systems erfolgt, wie bereits in Kapitel 4.2.1 erläutert wurde, durch Fesselung der Knoten am unteren und oberen Rand des FE-Gitters, wobei nur die Mittenknoten gegen Breitenverschiebung gehalten werden. Die Knoten am oberen Rand werden dann im Verlauf der Rechnung um jeweils einen gleichen Betrag verschoben. Die makroskopische Zugkraft entspricht der Summe der Reaktionskräfte dieser Knoten.

Die Steuerung der Verschiebungsinkremente ist in Kapitel 4.2.7 beschrieben. Dabei ergeben sich die diskreten Werte der Verschiebungen aus den Inkrementen, die notwendig sind, damit in jedem positiven Verschiebungsinkrement gerade ein weiteres Element reißt. Bei Erreichen dieser Schwelle werden solange nur Verschiebungsinkremente der Größe null aufgebracht, bis alle Bruchvorgänge einschließlich aller infolge vorangegangener Brüche aus den Lastumlagerungen entstehenden Folgebrüche abgeschlossen sind. Aufgrund der Notwendigkeit von Vorschätzungen für die richtige Verschiebungsinkrementgröße ergeben sich Zwischenschritte. Ungültige, d. h. zu große, Zwischenschritte werden intern als Vorschätzung verwendet, aber es erfolgt keine Ausgabe von Spannungen oder Verschiebungen; in den Rechenprotokollen werden sie als Versuch („attempt“) angegeben.

Die in diesem Kapitel ausgewerteten Größen sind die Probenspannung und die Probenschädigung und bei den taillierten Proben zusätzlich der Ort der Schädigung. Die zuletzt genannte Größe wird in Abschnitt 6.3.5 ab Seite 112 genauer beschrieben.

Die Probenspannungen sind grundsätzlich – unabhängig von der Anzahl der stochastischen Werte – als Randlast F bezogen auf die Probenbreite, d. h. die Kontinuumsbreite, definiert, wobei diese im unverformten Zustand berechnet wird. Als Bruchspannung wird die maximale Spannung bezeichnet, die die Probe im Lauf ihrer Berechnung erreicht hat. Dies ist im allgemeinen auch die Spannung, bei der keine weiteren positiven Verschiebungen mehr aufgebracht werden, da dann kaskadenartig weiteres Rißwachstum erfolgt.

Die Probenschädigung, die oft mit $b=N_b/(NM)$ bezeichnet wird, berechnet sich aus der Anzahl gebrochener Elemente, N_b , bezogen auf die tatsächliche Gesamtzahl an bruchfähigen Elementen. Bei Verwendung des Kohäsivmodells ist dies die Anzahl von (tatsächlich vorhandenen) Kohäsivelementen. Als Bruchschädigung wird die Probenschädigung bezeichnet, bei der die Bruchspannung erreicht wird, also bevor die Schädigung kaskadenartig durch innere Spannungsumlagerungen anwächst. (In Abbildung 10.12 ist in Inkrement 35 die Bruchspan-

nung und Bruchschädigung erreicht; die für die Bruchschädigung maßgebliche Anzahl gebrochener Elemente ist in Abbildung 10.13, oben, der unterste Wert des senkrecht nach oben weisenden Astes der Kurve.)

6.1.2 Verwendete Grundverteilungen

Als Versagenskriterium wird ein lokales, statistisch streuendes Festigkeitskriterium auf mikrostruktureller Ebene angesetzt, mit welchem die fluktuierenden Festigkeitsunterschiede der Mikrostruktur als abgedeckt angenommen werden. Dieses wird im Rahmen der Modellierung mit Kohäsivelementen als Grenzknotenkraft, f_c , der an die Kohäsivelemente angrenzenden Kontinuumsselemente in Zugrichtung (s. Abbildung 4.7) und für die Modellierung mit versagenden Kontinuumsselementen als Grenznormalspannung, $\sigma_{yy c}$, jeweils auf Elementebene eingesetzt.

Nicht berücksichtigt sind durch diesen Ansatz fluktuierender Festigkeitsunterschiede die unterschiedlich großen Körner einer realen Probe und die zwangsläufig daraus folgende geometrische Unordnung und die relative Versetzung der Körner zueinander. Die relative Versetzung der Körner zueinander wird als maßgebliche Ursache für das Arretieren von bereits entstandenen Mikrorissen betrachtet und findet seine Entsprechung im Modell durch die plötzliche Grenzfestigkeitsänderung an den Elementrändern. Die geometrische Unordnung aus unterschiedlich großen Körnern wird in ihrer Wirkung implizit durch die Grundverteilung der Grenzfestigkeitsunterschiede berücksichtigt und explizit im Modell vernachlässigt.

Die Grenzfestigkeitsunterschiede des Materials werden als Stichprobenwerte aus einer kontinuierlichen Grundverteilungsfunktion angesehen. Alle Grundverteilungen für die in diesem Kapitel gezeigten Modellproben entstammen einer Approximation nach Gl. (3.42) für eine nach unten begrenzte WEIBULL-Verteilung. Hierbei ist die untere Grenze, a , die Spannung, bei der im Experiment die ersten Mikrorisse auftreten. Diese Spannung wird von Wittkowsky in [85] mit 400 MPa angegeben. In einigen früh durchgeführten Rechnungen mit dem Kohäsivmodell wurde aber auch $a=500$ MPa verwendet.

Die übrigen Parameter, d. h. c und p , können nur geschätzt werden. Vergleiche des Verhaltens der Modellproben mit dem Verhalten, welches reale Proben zeigten, kann dann einen Hinweis auf die geeigneten Größenordnungen liefern.

Um die Untersuchungen zu beschränken, wurde der Exponentialparameter p für die untersuchten Modellproben immer gleich 2 gesetzt, d. h. $d=0.5$ in Gl. (3.43), während die Verteilungsbreite, $\zeta=c/a$ in Gl. (3.44), stark variiert wurde. In einigen frühen Rechnungen, die zu Vergleichszwecken mit dem Bündelkettenmodell durchgeführt wurden, war ζ tendentiell eher klein gewählt worden ($\zeta \leq 1$ bis 3). Bei Untersuchungen an taillierten Modellproben, die mit dem erst später implementierten Modell mit bruchfähigen Kontinuumsselementen durchgeführt wurden, erschienen hingegen breitere Grundverteilungen angemessener, so daß Grundverteilungen bis $\zeta=20$ untersucht wurden.

6.1.3 Bestimmung der Versagens- und Schädigungswahrscheinlichkeiten

Werden Serien nominell gleicher Proben berechnet, können die für jede dieser Proben ermittelten Bruchspannungen und Bruchschädigungen als Stichprobenwerte einer Verteilungsfunktion $p(x)$ angesehen werden. Grundsätzlich ist diese resultierende Verteilungsfunktion nicht bekannt. Die kumulative Verteilung kann aber geschätzt und diese Schätzung graphisch dargestellt werden. Zur Darstellung dieser Schätzung werden die diskret ermittelten Werte als kumulative Verteilungen $P(x)$ nach Kapitel 3.2 aufgetragen.

Dazu werden die I erzielten Bruchspannungswerte nach ihrer Größe sortiert, so daß $\sigma_1 \leq \sigma_2 \cdots \leq \sigma_I$ ist, womit dann jedem Wert eine Versagenswahrscheinlichkeit

$$P(\sigma_i) = (i - 0.5)/I \quad (6.1)$$

zugeordnet wird.

Analog den Bruchspannungen läßt sich auch für die Bruchschädigungen einer jeden Probenreihe eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aufstellen, wenn man die Bruchschädigungen, b_i , jeder Modellprobe i der I zu wertenden Modellrechnungen, unabhängig von ihrer jeweiligen Bruchspannung, nach ihrer Größe sortiert und wiederum eine Schädigungswahrscheinlichkeit

$$P(b_i) = (i - 0.5)/I \quad (6.2)$$

zuordnet.

6.1.4 Rechenaufwand

Die Rechenzeiten der FE-Modellproben variieren extrem – nicht nur in Abhängigkeit von den verwendeten Freiheitsgraden sondern auch in Abhängigkeit von der verwendeten Verteilungsbreite der Grundverteilung der stochastischen diskreten Belastungsgrenzen. Als weitere Faktoren für die Rechenzeiten sind in Kapitel 4.2.6, das Abbruchkriterium des iterativen Gleichungslösers und die Güte der Vorschätzung der Verschiebungsinkremente, u^0 , bereits benannt worden.

Während Proben der Größe $N \times M = 20 \times 100$ mit eher schmaler Grundverteilung ($\zeta = 5$) durchschnittlich nur etwa 1–3 Minuten bis zum Kraftmaximum benötigten, brauchten die selben Proben bei breiter Grundverteilung ($\zeta = 20$) aufgrund der höheren Schädigung bereits etwa 6–8 Minuten pro Probe. Bei Verdoppelung der Diskretisierung in jede Raumrichtung, also $N \times M = 40 \times 200$ Kontinuumselemente, benötigte eine taillierte Probe mit Grundverteilungsbreite $\zeta = 5$ etwa 30 Minuten pro Probe und mit $\zeta = 20$ sogar 90 Minuten. Der Grund für diese Zunahme bei den größeren Proben liegt nicht allein an der höheren Anzahl an Freiheitsgraden, sondern auch an der höheren Anzahl an benötigten Lastinkrementen zum Erreichen des gleichen Schädigungsanteils.

Proben mit konstantem Querschnitt erreichten höhere Schädigungen. Eine $N \times M = 40 \times 200$ große Probe mit $\zeta = 20$ benötigte im Schnitt 140 Minuten, also etwa die 1.5-fache Zeit der taillierten Proben gleicher Größe und Grundverteilung, und die selbe Probe mit Kohäsivelementen berechnet benötigte etwa 14–17 Stunden. Die Zunahme um den Faktor 6 erklärt sich durch die höhere Anzahl von Freiheitsgraden in Verbindung mit fast einer Verdoppelung an Iterationen für den Gleichungslöser zum Erreichen derselben Genauigkeit.

Um den Einfluß des Abbruchkriteriums auf die Rechenzeit zu verdeutlichen, seien hier noch Rechnungen aus der Programmtestphase erwähnt. Die Serie der größten Proben mit Kohäsivelementen, $N \times M = 100 \times 500$, das sind über 200 000 Freiheitsgrade, wurde anfangs mit einem strengen Genauigkeitskriterium berechnet. Nach der Berechnung der ersten beiden Modellproben wurde die Genauigkeitsanforderung für das maximale Knotenungleichgewicht, das auch den Ausiterierungsgrad des Gleichungslösers bestimmt, von vormals 0.000 01 MPa auf 0.1 MPa gesenkt. Die ersten beiden Proben benötigten 9 bzw. 98 Stunden bei 17 bzw. 120 Inkrementen, also deutlich über 30 Minuten pro Inkrement. Die übrigen 8 Proben dieser Serie benötigten im Schnitt 25 Stunden pro Probe bei durchschnittlich 72 Inkrementen, also mit 20 Minuten

pro Inkrement zwischen 50 und 70% der Zeit. (Die ersten beiden Proben benötigten dafür 977 bzw. 982 Iterationen je Solveraufruf, die übrigen zwischen 458 und 586.)

Rechenzeiten von mehreren Stunden gelten bei FE-Rechnungen sicher nicht als exorbitant, es muß dabei aber bedacht werden, daß wegen des statistischen Charakters grundsätzlich mehrere nominell gleiche Proben berechnet werden müssen.

Alle Rechnungen wurden auf einem sun™ „Fire Computerver“ mit 5 CPU und 3 GB Hauptspeicher durchgeführt.

6.2 Rechnungen für Flachzugproben konstanten Querschnitts

6.2.1 Rechnungen mit dem Kohäsivmodell

Versagensverhalten von Kohäsivmodellproben

Bei Aufbringen einer Verschiebung u^o am oberen Probenrand dehnt sich die Probe. In einer ungeschädigten Probe setzt sich diese Dehnung aus den Dehnungen der Kontinuumsselemente und den Separationen der Kohäsivelemente zusammen. Verwendet man die Beziehung $\delta = f/\psi$ (siehe Abbildung 4.7) für die Kohäsivseparation, die ebene Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy}$ für die Kontinuumsselemente in Belastungsrichtung und betrachtet ein gleichmäßiges FE-Netz, welches entlang der Belastungsrichtung mit M Kontinuumsselementen diskretisiert ist, die mittels $M-1$ Kohäsivelementen zusammengehalten werden, ergibt sich die Dehnung der Kontinuumsselemente

$$\varepsilon_{yy} = \frac{u^o}{(M-1)L_x E/\psi + ML_y}, \quad (6.3)$$

wobei L_y und L_x die Dimension der Kontinuumsselemente in Belastungsrichtung bzw. senkrecht dazu ist. Sind die Kontinuumsselemente rechteckig, also $L_x = L_y$, und wird die Probe groß, daß näherungsweise $(M-1)/M = 1$ gilt, ergibt sich die Verlängerung des Kontinuumsanteils zu

$$\Delta L_{Kontinuum} = \frac{u^o}{1 + \frac{E}{\psi}}. \quad (6.4)$$

Bei $\psi = E$ entfällt damit die Probendehnung zur Hälfte und bei $\psi = 5E$ immer noch zu 16% auf die Separation der Kohäsivelemente. Grundsätzlich sind deshalb die aufzubringenden Randverschiebungen höher, als sie ohne die Kohäsivelemente wären.

Bei Versagen eines Kohäsivelements ziehen sich Elemente oberhalb und unterhalb des gebrochenen Elements aufgrund elastischer Entlastung wieder zusammen. Dies bedeutet aber gleichzeitig auch das Zusammenziehen der weiter daran anschließenden Kohäsivelemente, während die Separationen und Dehnungen der ungeschädigten Elemente aufgrund der Lastumlagerung größer werden. Die Deformationen innerhalb der Modellprobe sind deshalb erheblich größer als in vergleichbaren Proben, bei denen zur Modellierung ausschließlich (bruchfähige) Kontinuumsselemente verwendet werden (vgl. Abbildung 10.53 auf Seite 163).

Die Deformation am Rißrand wird durch die kumulative Wirkung der elastischen Entlastungen von Kontinuumsselementen und Kohäsivseparation verstärkt. Dies führt aber nicht zu verstärktem Rißwachstum an diesen Rändern, sondern scheint diese zusätzlich abzuschirmen,

so daß Risse an anderer Stelle bevorzugt entstehen. Dies führt zu einer höheren Lastaufnahme der Probe. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, führt die Modellierung mit weniger separierenden Kohäsivelementen, bei denen also die Deformation aufgrund einzelner Mikrorißvorgänge geringer ausfällt, zum früheren Durchbrechen der Probe bei niedrigeren Bruchspannungen und niedrigeren Bruchschädigungen.

Einfluß der Kohäsivparameter

Die Rißeenergie Γ wurde in Gl. (4.60) als Funktion der generierten Bruchfestigkeiten, f_c , der Kohäsivseparation δ , die auch durch f_c/ψ ausgedrückt werden kann, und der Breite der angrenzenden Kontinuums-elemente, L_x , angegeben. An dieser Stelle soll untersucht werden, ob sich das Modell bei unterschiedlicher Elementgröße L_x aber gleicher Rißeenergie gleich verhält.

Zu diesem Zweck wurde eine willkürlich ausgewählte Modellprobe, bei der die Kontinuums-elemente mit Einheitsgröße generiert waren, erneut berechnet. Die Elementgröße wurde dabei halbiert, d. h. $L_x = L_y = 0.5$ gewählt. Um die Rißeenergie konstant zu halten, wurden auch der Parameter ψ und die generierten Bruchfestigkeiten halbiert. Abbildung 10.39 auf Seite 156 zeigt die Spannungs- und Schädigungsentwicklung über der Dehnung der Gesamtprobe. Die Kurvenverläufe der beiden Rechnungen sind bis kurz vor dem Maximum der Spannungen gleich (gleiche Spannungs- und Schädigungswerte je Lastinkrement), unterscheiden sich dann aber geringfügig voneinander. Die Probendehnungen weichen hingegen bereits vom Beginn der Rechnungen an sehr deutlich voneinander ab.

Der Grund dafür ist in der Konstanz der Rißeenergie zu finden, welche nur dann gegeben ist, wenn die Separation auch bei kleiner werdenden Elementen gleich bleibt, wofür zusätzlich zu f_c und L_x auch die Separationssteifigkeit, ψ , zu verändern ist (vgl. Gl. (4.60)). Dies führt zu einem höheren Anteil der Kohäsivseparation, δ , an der gesamten Probendehnung und damit zu einer höheren Deformation der Elemente bei Bruch. In Abbildung 10.40 ist die Spannungsentwicklung über der Schädigung für die beiden Rechnungen gezeigt, und man sieht in dieser Abbildung sehr deutlich, daß die Probe mit dem höheren Separationsanteil, das ist Probe b, eine gering höhere Bruchspannung bei deutlich höherem Schädigungsanteil erreicht.

Um das an diesem Vergleich erstmalig beobachtete Phänomen der Schädigungs- und Spannungsabhängigkeit von der Separation näher zu untersuchen, wurde ein Teil einer bereits berechneten Serie mit einer neuen Kohäsivsteifigkeit, ψ , berechnet und die Ergebnisse sowohl als Serie wie auch einzeln miteinander verglichen. Die übrigen Parameter (E, ν, L_x, L_y, f_{ci}) blieben dabei unverändert.

Von einer Serie aus 100 nominell gleichen Modellproben mit einer Grundverteilung nach Gl. (3.44) mit den Parametern $a=400$, $\zeta=20$ und $d=0.5$, die mit dem Kohäsivmodell berechnet wurden, wurden für die ersten 50 Proben die generierten Grenzfestigkeiten aus den gespeicherten Samen (s. Kapitel 3.3.2) regeneriert. Diese Modellproben wurden nun mit einer neuen Steigung des Kohäsivgesetzes berechnet. Während im ersten Rechengang diese Steigung mit $\psi=1.e6$ etwa 5 mal so groß war wie der E-Modul der Kontinuums-elemente, wurde sie beim zweiten Rechenlauf dem E-Modul ($18.e4$) gleichgesetzt. Die Rißeenergie Γ wurde dabei etwa 5 mal so groß wie zuvor, und der Anteil der Separation an der Gesamtverlängerung der Probe wurde erheblich vergrößert, so daß sowohl die absolute Kohäsivseparationen wie auch die Kontinuums-schubverzerrungen bei Bruch eines Kohäsivelements deutlich höher wurden, als bei der ersten Berechnung der Proben. Da sich mit der herabgesetzten Kohäsivsteifigkeit

bei gleicher Randverschiebung, u^o , eine um den ungefähren Faktor 0.6 verminderte Verzerrung der Kontinuumsselemente, ε_{yy} , vgl. Gl. (6.3), ergibt, wird auch die zu gleicher Längenänderung der Probe benötigte Zugkraft um diesen Faktor vermindert, so daß die Proben als „weicher“ angesehen werden können.

Abbildung 10.41 auf Seite 157 zeigt die erzielte Bruchspannung als offenen blauen Kreis jeder der 50 Proben im Vergleich zur Bruchspannung, die mit der ursprünglichen Kohäsivsteigung erzielt worden war (kompakter roter Punkt). In Abbildung 10.42 sind die Bruchschädigungen auf die gleiche Weise dargestellt. Deutlich ist dabei zu sehen, daß die Werte aus beiden Rechnungen nur in einigen Fällen zusammenfallen. Bei der Hälfte der Proben sind die Bruchschädigungen und Bruchspannungen der jeweils weicheren Probe (also die blauen Kreise, $\psi=18.e4$) deutlich über den Werten der Rechnungen mit geringerer Separation. Nur etwa ein Viertel der Rechnungen weist den umgekehrten Effekt auf. Dieses Ergebnis legt den Schluß nahe, das das Auftreten höherer Bruchwerte beim weicheren System nicht zufällig ist.

Die Abbildungen 10.43 und 10.44 auf Seite 158 zeigen die resultierenden Verteilungen der Rechnungen im Vergleich. Während sich die Abweichungen bei den Schädigungen fast auszugleichen scheinen, weist die Verteilung der Bruchspannungen beim weicheren System ($\psi=18.e4$) eine deutlich zu höheren Spannungswerten neigende Verteilung auf.

Obwohl die stärkere Deformation das System zusätzlich weicher macht, resultieren daraus offensichtlich höhere Bruchfestigkeiten als bei geringerer Deformation, sie erzeugt somit eine Art „Duktilisierung“ des Modellverhaltens, also eine dem spröden Werkstoffverhalten entgegengesetzte Wirkung.

Größeneffekt

Um die Abhängigkeit des Schädigungs- und Bruchverhaltens von der Probengröße in den FE-Modellen zu erfassen, wurden mehrere Serien von Modellproben unterschiedlicher Größe mit dem Kohäsivmodell berechnet.

Dazu wurden Proben der Größen $N \times M = 20 \times 100$, 30×150 , 50×250 und 100×500 berechnet. Für die ersten 3 Probengrößen wurden Ensembles von je 30 Proben und von den großen Proben ein Ensemble von 10 Proben berechnet. Alle 100 Proben waren nominell gleich mit einer relativ schmalen Grundverteilung $\zeta=2$. Die untere Versagensgrenze dieser Serie wurde mit $a=500$ MPa angesetzt, die diskreten Bruchspannungswerte liegen also zwischen 500 und 1500 MPa.

Tabelle 6.1 zeigt die Ergebnisse für die Bruchspannungen und Schädigungen dieser Proben. Angegeben ist dabei für jede Probengröße die kleinste und größte (min, max) aufgenommene Maximallast (F_{\max}) aller jeweiligen Proben und die Anzahl der dabei gebrochenen Kohäsiv-elemente (N_b), und der Mittelwert (MW) und die Standardabweichung (SA) dieser Werte für das gesamte Ensemble. Daneben werden die auf die Probengröße bezogenen Werte, Bruchlast $\sigma_B = F_{\max}/B$, und prozentuale Bruchschädigung, $b = 100 N_b/(N \times M)$, angegeben. Die mittlere Bruchspannung dieser Modellproben liegt nur knapp über dem Wert der unteren Grenze der generierten Elementfestigkeiten und nimmt mit wachsender Probengröße ab. Auch die kleinste erzielte Bruchspannung jeder Serie nimmt dabei ab, bis sie bei den großen Proben praktisch die untere Generierungsgrenze der Elementfestigkeiten erreicht hat. Wesentlich stärker nimmt dabei die obere Grenze der in jeder Probenserie erzielten Bruchfestigkeiten ab, was dazu beiträgt, daß auch die Streuung der Bruchspannungen mit zunehmender Probengröße geringer wird.

Tabelle 6.1: Bruchspannungen, σ_B , und -schädigungen, b , von Kohäsivmodellproben aus $N \times M$ Kohäsivelementen und $(N-1) \times (M+1)$ Kontinuums-elementen, $M:N=5$.

Verteilungsparameter für das Beispiel: $a=500$, $c=2a=1000$ ($\zeta=2$), $d=0.5$; $p=1/d$

Größe der Kontinuums-elemente: $l_x=l_y=1$, $E=170$ GPa, $\nu=0.3$; Kohäsiv- $\psi=1.e6$

Größe	Seriengröße	NM	B [mm]		F_{\max} [N]	N_b [Stk]	σ_B [MPa]	b [%]
20×100	30 Proben	2 000	19	MW	10 741	12.6	565	0.63
				SA	382	6.5	20	0.32
				Min	9 906	2	521	0.10
				Max	11 505	27	605	1.35
30×150	30 Proben	4 500	29	MW	16 174	21.7	558	0.48
				SA	573	12.7	20	0.28
				Min	15 127	4	522	0.09
				Max	17 227	45	594	1.00
50×250	30 Proben	12 500	49	MW	26 688	38.2	545	0.31
				SA	867	24.8	18	0.20
				Min	25 092	1	512	0.008
				Max	28 433	91	580	0.73
100×500	10 Proben	50 000	99	MW	52 629	81.0	532	0.16
				SA	1 573	57.9	16	0.12
				Min	49 598	1	501	0.002
				Max	54 543	155	551	0.31

Werden die Schädigungen betrachtet, stellt man fest, daß infolge der sehr schmalen Grundverteilung in allen Serien Proben bereits nach wenigen Einzelbrüchen ihr Kraftmaximum erreicht haben und kaskadenartig ein Lokalisierungseffekt eintritt. Bei den größten Proben ist dieser Zustand bereits nach dem ersten Mikroriß aufgetreten. Infolge der höheren Anzahl von Kohäsivfasern pro Schicht nimmt die Maximalzahl der Mikrorisse im Kraftmaximum zwar zu, aber der Anteil der Proben mit hoher Schädigung nimmt auch hier mit wachsender Probengröße ab, so daß auch die Streuung der Bruchschädigungen mit wachsender Anzahl von Elementen abnimmt.

Der Probengrößeneffekt ist also sowohl für die Bruchspannung als auch für die Schädigung deutlich negativ. Betrachtet man nun noch den Variationskoeffizienten, also das Verhältnis der Standardabweichung zum Mittelwert in Prozent, $SA/MW \cdot 100$, stellt man fest, daß dieser Wert bei den Bruchspannungen mit wachsender Probengröße leicht abnimmt, von 3.5% zu 3%, bei den Schädigungen aber steil ansteigt: bei der kleinsten Probengröße beträgt die Standardabweichung etwa 50% des Mittelwerts, bei den größeren Proben wächst diese Relation bis auf 75% an. Während der Mittelwert der Schädigung von den kleinen zu den großen Proben um 75% abnimmt, nimmt die Streuung lediglich um etwa 60% ab.

6.2.2 Rechnungen mit versagenden Kontinuums-elementen

Versagensverhalten

Für Proben mit konstantem Querschnitt brechen, wie bei der Modellierung mit Kohäsivelementen, zuerst die Elemente mit den geringsten Festigkeiten. Ist die Breite der Grundver-

teilung sehr schmal, tritt praktisch sofort Rißlokalisierung ein. Erst wenn die Probe nach einer Vorschädigung deformiert ist, ohne dabei bereits kaskadenartig durchgebrochen zu sein, wird nachfolgend Rißenstehung und Rißwachstum nicht mehr allein durch die Verteilung der Festigkeiten bestimmt.

Mikrorisse können sich in diesem Modell aber nicht nur senkrecht zur Belastungsrichtung ausbreiten, sondern auch parallel dazu, indem direkt benachbarte Elemente, d. h. Elemente mit gemeinsamer Elementgrenzfläche, versagen. Gebrochene Elemente, die hingegen nur an einem Knoten, d. h. diagonal, miteinander verbunden sind, bilden keinen vereinigten Riß, da ihr gemeinsamer Knoten durch die ungerissenen Elemente in der anderen Diagonalrichtung an seiner Stelle gehalten werden kann. Dies korrespondiert mit der Vorstellung, daß die Elemente in diesem Modell die Korngrenzflächen senkrecht zur Zugrichtung darstellen. Elemente die auf die beschriebene Art „über Eck“ gebrochen sind repräsentieren dann versetzte Mikrorisse in benachbarten Grenzschichten. (In Abbildung 10.53b sind diese beiden Effekte, oben links und rechts etwas tiefer davon, zu sehen.)

Untersuchte Modellproben

Um das Bruchverhalten genauer zu verstehen, sollen hier von den Rechnungen, die mit dem Modell mit bruchfähigen Kontinuumelementen durchgeführt wurden, 4 Probenserien gezeigt werden, bei denen die Breite der Grundverteilung, ζ , und die Elementierung variiert wurde. Zur Abschätzung des Einflusses der Grundverteilung werden darüberhinaus Ergebnisse weiterer Probenserien einer konstanten Probengröße gezeigt.

Die Wahrscheinlichkeit für die Bruchfestigkeiten der Elemente wurde bei den Proben variabler Größe mit einer unteren Verteilungsgrenze a von 400 MPa und einem Exponentialparameter $p=2$ nach Gl. (3.42) angenommen, so daß die diskreten Grenzfestigkeiten, $\sigma_{yy ci}$, nach Gl. (3.44) generiert werden konnten. Für die ersten beiden Serien wurde die Verteilungsbreite $\zeta=5$ gewählt, so daß Festigkeiten zwischen 400 und 2400 MPa generiert wurden. Für die zweiten beiden Serien wurde $\zeta=20$ gewählt, womit Elementfestigkeiten zwischen 400 und 8400 MPa entstehen.

Mit jeder der Verteilungsbreiten wurde jeweils eine Serie mit $N \times M = 20 \times 100$ Elementen und je eine Serie mit 40×200 Elementen erzeugt. Die Probengröße war in allen Fällen $2 \times 10 \text{ mm}^2$ bei Elementgrößen $L_x = L_y$ von 0.1 mm bzw. 0.05 mm. Es wurden je Serie 100 Proben generiert und berechnet. Einige Proben der höheren Elementanzahl wurden bei der Auswertung unberücksichtigt gelassen, so daß in Tabelle 6.2 bei diesen Serien weniger als 100 Proben angegeben sind. Der Grund dafür ist, daß die in Abschnitt „Behandlung undefinierter Knotenverschiebungen“ (Kapitel 4.2.3, ab Seite 55) gezeigten Maßnahmen anfangs nicht für Randelemente implementiert war.

Die Probenserien, die zur Abschätzung des Einflusses der Grundverteilung noch gezeigt werden, besitzen alle die gleiche Größe $N \times M = 20 \times 100$. Bei einer Serie von 100 Proben wurde die untere Verteilungsgrenze a auf 500 MPa erhöht, während die absolute Breite der Grundverteilung, c , mit 2000 MPa mit einer der zuvor benannten Serien übereinstimmt. Da sich hierbei das Verhältnis $\zeta = c/a$ zu $\zeta=4$ ändert, wird eine weitere Probenserie zum Vergleich herangezogen, bei der die untere Verteilungsgrenze $a=400$ mit den zuerst erwähnten Serien, das Verhältnis ζ aber mit der zuletzt genannten Serie übereinstimmt ($\zeta=4$). Damit ergeben sich Grenzfestigkeiten $400 \leq \sigma_c \leq 2000$ MPa. Von dieser Serie wurden nur 30 Proben berechnet.

Bruchspannungen und -schädigungen, Größeneffekt

Tabelle 6.2 zeigt die erzielten Bruchspannungen und Schädigungen der Proben.

Tabelle 6.2: Bruchspannungen und Bruchschädigungen untaillierter Modellproben mit $N \times M$ bruchfähigen Kontinuumelementen, $M:N=5$.

Verteilungsparameter für das Beispiel: $a=400$, $c=\zeta a$, $d=0.5$; $p=1/d$, ($v=\zeta/5$)

Kontinuumelemente, $E=180$ GPa, $\nu=0.3$; Probenbreite= 2 mm

Größe	$\zeta=5$ ($v=1$)				$\zeta=20$ ($v=4$)			
	20×100		40×200		20×100		40×200	
Serie	100 Proben		85 Proben		100 Proben		70 Proben	
Bezeichnung	G20v1		G40v1		G20v4		G40v4	
	Zugkraft [N] und Bruchspannungen [MPa]							
MW	1 144	572	1 097	549	3 147	1 573	2 961	1 481
SA	77	39	59	30	287	143	219	109
Min	973	487	917	459	2 542	1 271	2 217	1 109
Max	1 298	649	1 218	609	3 766	1 883	3 341	1 671
SA/MW [%]	7%		5%		9%		7%	
	Anzahl gebrochener Elemente, N_b , und Bruchschädigungen [%]							
MW	21	1.1	62	0.8	59	2.9	190	2.4
SA	9	0.5	23	0.3	16	0.8	46	0.6
Min	6	0.3	19	0.2	24	1.2	74	0.9
Max	42	2.1	117	1.5	98	4.9	280	3.5
SA/MW [%]	43%		37%		27%		24%	

Wie bereits die mit dem Kohäsivmodell berechneten Proben zeigen auch diese Proben einen eindeutig negativen Probengrößeneffekt, unabhängig von der Breite der Grundverteilung: bei den Proben mit der schmalen Grundverteilung sinkt die mittlere Bruchspannung um etwa 3% bei Verdoppelung der Anzahl stochastischer Werte pro Raumrichtung, bei den Proben mit der breiten Grundverteilung fällt die mittlere Bruchspannung sogar um etwa 6% ab. Damit einher geht die Abnahme der Streuung.

Die Verteilung der Bruchspannungen ist in Abbildung 10.45 auf Seite 159 graphisch dargestellt. Es ist dabei deutlich zu erkennen, daß die erzielten Bruchspannungen sehr gleichmäßig im mittleren Bereich verteilt sind, während die Ränder erwartungsgemäß sehr dünn besetzt sind.

Betrachtet man die Bruchschädigungen, ergibt sich ein sehr ähnliches Bild wie bei den Spannungen. Für beide Werte von ζ nehmen sowohl Mittelwert als auch Standardabweichung mit zunehmender Probengröße (jeweils dunklerer Punkte) ab. Interessant ist hierbei, daß anders als bei den zuvor mit dem Kohäsivmodell vorgestellten Rechnungen auch der Variationskoeffizient bei beiden Verteilungsbreiten abnimmt. Bei der schmalen Verteilung, $\zeta=5$, ist das Verhältnis SA/MW mit 43% etwas geringer als bei der gleichgroßen Probe des Kohäsivmodells mit $\zeta=2$, wo er bei etwa 50% liegt. Daß dieser Anteil bei der gleichgroßen Probe mit $\zeta=20$ weiter auf 27% sinkt, zeigt einen Trend in dieselbe Richtung: je breiter die Grundverteilung, desto geringer ist das Verhältnis SA/MW bei gleicher Elementanzahl. Überraschend

ist die Abnahme dieses Quotienten bei beiden Grundverteilungen mit zunehmender Elementanzahl, während er in den Kohäsivmodellproben mit jeder Verfeinerung der Elementierung deutlich gestiegen ist, obwohl bei allen Vergrößerungen der Elementanzahl das Verhältnis Höhe:Breite=5 konstant blieb. Möglicherweise deutet dieser Umstand darauf hin, daß den Elementen, die bei den beiden Modellen versagen können, unterschiedliche mikrostrukturelle Bedeutung zukommt.

Die Schädigungsverteilung ist in Abbildung 10.46 auf Seite 159 graphisch dargestellt. Deutlich sind bei den Proben die Stufen zu sehen, die sich aus den ganzzahligen Werten für die geschädigten Elemente ergibt.

Auffallend ist für beide Verteilungen, Schädigungen und Bruchspannungen, daß die zu verschiedenen Werten von ζ gehörigen Verteilungen mit zunehmender Schädigung stärker voneinander abweichen, also um einen Punkt gekippt zu sein scheinen, der bei sehr kleinen Werten der Schädigung liegt.

***weakest-link*-Skalierungen**

Wird die Bruchspannungsverteilung der größeren Probe, ähnlich wie bereits bei der Bündelkette in Kapitel 5.3.2 gezeigt, punktweise mit der *weakest-link*-Skalierungsvorschrift Gl. (4.25) auf die kleinere Elementanzahl skaliert, also jeder Punkt P_i der Verteilung der großen Probe aus $40 \times 200 = 8000$ Elementen der Vorschrift

$$1 - P_{skal2000} = (1 - P_{8000})^{1/k} \quad (6.5)$$

mit $k=4$ unterworfen, lassen sich die resultierenden, punktweise gegebenen Verteilungen wie in Abbildung 10.47 auf Seite 160 darstellen. In Abbildung 10.48 wurde die gleiche Skalierung auf die Bruchschädigungen angewandt.

Während die Anwendung der *weakest-link*-Skalierung bei der Bündelkette mit LLS-Regel, vgl. Abbildungen 10.35 und 10.36, keine sehr ermutigenden Resultate zeigte und die skalierten Kurven weiter divergierten als die nichtskalierten, sind die skalierten Verteilungen in den Abbildungen 10.47 und 10.48 deutlich enger beieinander, als ihre unskalierten Verteilungen in den Abbildungen 10.45 und 10.46. Die vorgestellten Systeme mit stochastisch generierten Elementfestigkeiten scheinen also bei Anwendung des Finite-Elemente-Modells in guter Näherung einem *weakest-link*-Mechanismus zu gehorchen, und dies sowohl hinsichtlich der Verteilung der Bruchspannungen als auch der Verteilung der Bruchschädigung.

Auswirkung unterschiedlicher Grundverteilungen

Um eine Vorstellung davon zu bekommen, welche Auswirkung die Variation der Grundverteilung der generierten Elementfestigkeiten auf die Probenbruchspannung und die dabei auftretende Schädigung hat, werden 4 Serien von Modellproben der gleichen Größe $N \times M = 20 \times 100$ miteinander verglichen. Dies sind einmal die Proben G20v1 und G20v4 aus Tabelle 6.2, zum anderen 2 Serien gleicher Probengröße und Elementanzahl, aber neuer Grundverteilung.

Beide neu eingeführten Serien besitzen das gleiche Verhältnis der Breite der Grundverteilung zur unteren Verteilungsgrenze, $\zeta=4$. Die untere Verteilungsgrenze wurde einmal mit $a=400$ MPa passend zu den Proben G20v1 und G20v4 gewählt; zur Vereinfachung wird diese Probenreihe „A4Z4“ bezeichnet. Die absolute Verteilungsbreite, $c=\zeta a$, dieser Proben beträgt 1600 MPa. Um auch einen Vergleich mit variiertem unterer Grenze der generierten Elementfestigkeiten vornehmen zu können, wurde eine weitere Serie generiert, die mit „A5Z4“ bezeichnet

wird. Diese Serie erhielt den Parameter $a=500$ MPa, so daß die absolute Breite der Grundverteilung (bei $\zeta=4$) $c=\zeta a=2000$ MPa beträgt, wie sie es auch bei Serie G20v1 ist.

Für die 3 Serien G20v1, G20v4 und A5Z4 liegen Ergebnisse von je 100 Modellproben vor, während für die Probenserie A4Z4 lediglich 30 Modellproben berechnet wurden, so daß die Datenbasis kleiner als ist, als für die anderen drei. Für die beabsichtigte Untersuchung erscheint eine Ensemblegröße von 30 Modellproben dabei als ausreichend.

Ziel dieser Untersuchung ist es, den Einfluß der Grundverteilung auf die Verteilung von Bruchspannungen und Schädigungen zu verstehen, insbesondere den Unterschied des Einflusses von absoluter und relativer Grundverteilungsbreite, c und ζ . Die Grundverteilung der Probenserie A5Z4 ist dabei gegenüber der Grundverteilung der Serie G20v1 um 100 MPa verschoben, während sie gegenüber der Grundverteilung der Serie A4Z4 um den Faktor 1.25 gestreckt ist. Probenserie G20v4 wurde wegen der wesentlich breiteren Verteilung der Elementfestigkeiten in den Vergleich miteinbezogen.

Tabelle 6.3: Vergleich Bruchspannungen und -schädigungen bei variiertter Grundverteilung

Verteilungsparameter für alle Probenserien: $c=\zeta a$ [MPa], $d=0.5$; $p=1/d$

20×100 Kontinuumelemente: $E=180$ GPa, $\nu=0.3$; Probenmaße: $B \times H=2 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$.

Serie	Grundverteilung			Bruchspannung [MPa]				Schädigung			
	a	ζ	c	MW	SA	$\frac{SA}{MW}$	σ/a	N_b	MW b	SA b	$\frac{SA}{MW}$
A4Z4	400	4	1600	513	± 26	5.0%	1.28	14	0.71%	$\pm 0.33\%$	48%
A5Z4	500	4	2000	641	± 40	6.2%	1.28	15	0.75%	$\pm 0.40\%$	53%
G20v1	400	5	2000	572	± 39	7.6%	1.43	21	1.06%	$\pm 0.45\%$	42%
G20v4	400	20	8000	1 573	± 143	9.1%	3.93	59	2.93%	$\pm 0.78\%$	27%

Tabelle 6.3 zeigt für diese Probenserien die mittleren absoluten Bruchspannungen und ihre Streuungen (MW, SA). Daneben werden die Variationskoeffizienten, $100 SA/MW(\sigma)$, die auf die untere Verteilungsgrenzen bezogenen mittleren Bruchspannungen, σ/a , die jeweilige durchschnittliche Anzahl gebrochener Elemente, N_b , die relativen Schädigungen, $b=100 N_b/(NM)$, deren Streuungen und deren Variationskoeffizienten, $100 SA/MW(b)$, gezeigt.

Betrachtet man zuerst die Serien, die mit einheitlicher unterer Grenze für die Versagensgrenzwerte, a , generiert wurden, erkennt man, daß sowohl die mittlere Bruchspannung und -schädigung, als auch deren Streuungen mit wachsender Breite der Grundverteilung ansteigen, der Variationskoeffizient der Schädigung jedoch abnimmt.

Betrachtet man dagegen die ersten drei Probenserien der Tabelle, zeigt sich, daß die auf die untere Grundverteilungsgrenze normierten mittleren Bruchspannungen, σ/a , für die gleichen Relativbreiten der Grundverteilung, ζ , gleich sind, während die absoluten Streuungsbreiten mit den Absolutbreiten der Grundverteilungsfunktionen, c , korreliert erscheinen.

Die Korrelation des auf die untere Generierungsgrenze normierten Mittelwertes erklärt sich leicht, da die auf a normierten Grundverteilungen in beiden Fällen gleich sind, wie aus Gl. (3.44) folgt:

$$\frac{\sigma_c}{a} = 1 + \zeta r^d, \quad (6.6)$$

wobei $r \in [0, 1]$ zufällig ist. Dies erklärt auch, daß die zugehörigen Schädigungen annähernd

gleich sind. Die Streckung der Grundverteilung findet sich folglich bei der mittleren Bruchspannung der Proben wieder.

Unklar ist allerdings dabei, warum sich der Variationskoeffizient der Bruchspannungen nicht ebenso verhält, da sich auch deren Standardabweichung bei gleichen ζ proportional zu a verhalten sollte. Es ist daher zu vermuten, daß dies Zufall ist, der sich durch das kleine Probenensemble begründen ließe.

Zusammenfassend kann deshalb festgestellt werden, daß eine breitere Grundverteilung bei konstanter unterer Generierungsgrenze der Elementfestigkeiten sowohl die mittlere Bruchspannung als auch die dabei erzielte Schädigung als auch deren Streuungen vergrößert. Eine reine Streckung der Grundverteilungsvorschrift scheint auch die mittlere Bruchspannung im gleichen Maß zu strecken, wobei die Bruchschädigung dabei konstant bleibt. Bei reiner Verschiebung der Grundverteilung, hingegen, bleibt die Streuung der Bruchspannung konstant.

6.2.3 Vergleich der Versagensmodelle

An den nichttaillierten Probengeometrien soll noch untersucht werden, wieweit sich die beiden Modellierungsarten, einerseits das Versagensverhalten durch Kohäsiv-Knoten-Elemente, andererseits durch die Bruchfähigkeit der Kontinuumsselemente selbst zu modellieren, miteinander vergleichen lassen.

Dazu wurde zuerst eine Vergleichsserie Modellproben mit dem Kohäsivmodell generiert. Die Größe und Grundverteilung dieser Proben wurde so gewählt, daß sie mit den kleineren Proben der Tabelle 6.2 aus Abschnitt 6.2.2 mit breiter Grundverteilung, Serie „G20v4“, vergleichbar sind, also $a=400$, $\zeta=20$, $p=2$ bei einer Größe $N \times M=20 \times 100$ (exakt: 20×100 Kontinuumsselemente und 21×99 Kohäsivelemente).

Die Bruchspannungs- und Schädigungsverteilung dieser nominell gleichen Proben (goldene Sterne) wurde zusammen mit der zu vergleichenden Verteilung der Kontinuumsmodellrechnungen (hellblaue Punkte) in je ein Diagramm eingetragen (Abbildungen 10.49 und 10.50 auf S. 161). Daß diese Verteilungen nicht übereinstimmen, sondern deutlich gegeneinander verschoben sind, ist offensichtlich.

Als Hauptquelle dieser Abweichung in den resultierenden Verteilungen erwies sich das Versagenskriterium, welches bei der Implementierung des Kontinuumsmodells verwendet wurde.

Bei der Implementierung des Modells mit bruchfähigen Kontinuumsselementen mußte entschieden werden, wie das Spannungsbruchkriterium im Rahmen der Spannungsberechnung an Integrationspunkten angewendet werden sollte. Solange die Modellprobe (konstanter Breite) ungeschädigt ist, entfallen auf alle Integrationspunkte die gleichen Spannungen. Mit fortschreitender Schädigung und daraus resultierender Deformation ist die Spannung im Element nicht mehr konstant, wodurch die Integrationspunkte unterschiedlich belastet werden. Das Versagen soll elementweise geschehen. Die experimentellen Untersuchungen, siehe [85], weisen darauf hin, daß einmal entstandene Mikrorisse sich sehr schnell auf Korngröße erweitern. Wegen dieses Verhaltens wurde entschieden, ein Element dann versagen zu lassen, wenn die generierte Grenzspannung bereits an *einem* Integrationspunkt überschritten wird. Damit sollte das Modellverhalten dem beobachteten Materialverhalten angenähert werden.

Um die Auswirkungen des GP-Kriteriums¹ in der Spannungs- und Schädigungsentwicklung zu verstehen, wurde in einem nächsten Schritt eine Kontinuumsprobe mit 21×99 Elementen ge-

¹Der einfacheren Schreibweise zuliebe wird das Kriterium, in welchem Flächenanteil die Spannung mindestens die stochastisch fürs Element generierte Grenzspannung erreicht haben muß, um als versagt angesehen zu werden, als „GP-Kriterium“ bezeichnet (GP=GAUSSpunkt).

neriert, so daß sie mit den identischen Grenzspannungswerten einer der Kohäsivmodellproben (Probe *a*) ausgestattet werden konnte. Die Kontinuumsprobe wurde nacheinander mit dem Kriterium, daß ein Element versagt, wenn die Grenzspannung an einem GP überschritten wird (Probe *b*), wenn die Grenzspannung durch den Mittelwert aller 4 Element-GP überschritten wird (Probe *c*) und wenn die Grenzspannung an allen 4 GP überschritten wird (Probe *d*) berechnet².

Tabelle 6.4: 4 FE-Modellrechnungen konstanten Querschnitts bei F_{\max}

Alle 4 Modellproben erhielten den gleichen Satz von 21×99 generierten Festigkeiten. Probe *a* wurde mit dem Kohäsivmodell mit 20×100 Kontinuums- und 21×99 Kohäsivelementen berechnet; Proben *b* – *d* wurden mit 21×99 bruchfähigen Kontinuums-elementen berechnet. Bei Probe *b* war das Überschreiten der Grenzfestigkeit in einem Integrationspunkt, bei Probe *c* das Überschreiten des Spannungsmittelwerts aller Integrationspunkte und bei Probe *d* das Überschreiten der Grenzfestigkeit in allen Integrationspunkten Versagenskriterium. (Vergleiche dazu Abbildungen 10.51 und 10.52.)

Verteilungsparameter für das Beispiel: $a=400$, $c=20a=8000$ ($\zeta=20$), $d=0.5$; $p=1/d$

Größe der Kontinuums-elemente: $l_x=l_y=1$, $E=180$ GPa, $\nu=0.3$; Kohäsiv- $\psi=1.e6$

Probe	Modell	B_P	H_P	Inkr.	u^o	N_b	F	ΔL_{Kont}	b	σ_{Br}
<i>a</i>	Koh.	20	100	244	1.92	145	42 819	1.63	6.97%	2 141
<i>b</i>	1 GP	21	99	144	1.06	88	34 427	1.06	4.23%	1 639
<i>c</i>	MW-GP	21	99	207	1.29	115	41 045	1.29	5.53%	1 955
<i>d</i>	4 GP	21	99	329	2.05	198	55 489	2.05	9.52%	2 642

Tabelle 6.4 zeigt für die vier Modellrechnungen die generierten Abmessungen, Probenbreite und -höhe, B_P und H_P , die für dieses Beispiel aus Vereinfachungsgründen durch Einheits-elemente erzeugt wurden, das Inkrement bei welchem das Kraftmaximum erreicht wurde, die dabei erzielte Randverschiebung, u^o , die Anzahl der dabei gebrochenen Elemente, N_b , und die dabei erzielte Probenzugkraft, F . Daneben ist die Verlängerung des Kontinuums, ΔL_{Kont} , angegeben, welche für die reine Kontinuums-elementierung identisch mit der Randverschiebung, u^o , ist und für die Kohäsivprobe aus der Kontinuumsdehnung mit Gl. (6.3) ermittelt wurde. Daneben sind die ermittelten Werte für die Schädigungen in Prozent, $b=100N_b/(NM)$, und die Bruchspannungen, σ_{Br} , angegeben. Dazu zeigen die Abbildungen 10.51 und 10.52 auf Seite 162 den Verlauf der Spannungsentwicklung der Modellrechnungen über der Kontinuumsverlängerung und die Spannungs-Schädigungsentwicklung für diese 3 Integrationspunktkriterien im Vergleich mit der des Kohäsivmodells.

Es wird dabei deutlich, daß dem Flächenbereich des Elements in dem die generierte Grenzspannung überschritten sein muß, damit das Element als gebrochen gilt, dem makroskopischen Bruchverhalten einer Modellprobe große Bedeutung zukommt.

(Zur besseren Vorstellung zeigt Abbildung 10.53 auf Seite 163 für drei der Modellproben ihr Schädigungsbild bei ihrem jeweiligen Kraftmaximum. Die Darstellung ist maßstäblich und zeigt die gebrochenen Elemente der Kontinuumsmodellierung als weiße Elemente, die gebrochenen Kohäsivelemente in Probe *a* kann man aus den Verzerrungen der dargestellten

²Entsprechend der abgekürzten Schreibweise „GP-Kriterium“ wird für die drei Kriterien, die für „Probe *b*“ – „Probe *d*“ beschrieben sind, die abgekürzte Schreibweise „1-GP-Kriterium“, „GP-MW-Kriterium“ und „4-GP-Kriterium“ verwandt.

Kontinuumsselemente erahnen. Die Spannungen σ_{yy} der Kontinuumsselemente sind durch eine für alle 3 Proben einheitliche Farbabstufung von gelb nach rot dargestellt. Da die Probe *a* die höchste Bruchlast erreichte, ist sie auch deutlich röter, als die anderen beiden Proben.)

Nachdem der Einfluß des GP-Kriteriums an diesem Beispiel für eine Probe gezeigt wurde, soll nun untersucht werden, wie sich diese Unterschiede auf das statistische Verhalten eines Probenensembles auswirken. Dazu wurden die 100 Kontinuumsmodellproben der Serie „G20v4“, die den Kohäsivmodellproben in Abbildung 10.49 nur nominell gleich sind, noch je einmal mit dem GP-MW-Kriterium und dem 4-GP-Kriterium berechnet und ihre makroskopische Verteilung in Abbildungen 10.49 und 10.50 eingetragen.

Es zeigt sich, daß die Bruchspannungsverteilung der Kohäsivmodellrechnungen fast mit der Verteilung zusammenfällt, die durch das GP-MW-Kriterium erzielt wird. Es zeigt sich aber auch, daß die ersten beiden GP-Kriterien praktisch parallele Verteilungen besitzen, während die Verteilung mit dem 4-GP-Kriterium etwas stärker streut. Die Bruchschädigungsverteilung der Kohäsivmodellierung ist etwas gegenüber der GP-MW-Verteilung der Modellrechnungen mit bruchfähigen Kontinuumsselementen versetzt, zeigt aber trotzdem mit ihr eine bessere Übereinstimmung als mit der Verteilung, die sich aus dem 1-GP-Kriterium ergibt.

Das gezeigte Beispiel legt die Vermutung nahe, daß die mit dem Kohäsivmodell gewonnenen Ergebnisse im Rahmen des Kontinuumsmodells am besten mit Hilfe des Mittelwertkriteriums (GP-MW) angenähert werden. Um diese Vermutung zu erhärten, wurden die in Abschnitt 6.2.1 behandelten, mit dem Kohäsivmodell an Proben mit 30×150 Kohäsivelementen durchgeführten Rechnungen (siehe Tabelle 6.1) an entsprechenden Proben mit versagenden Kontinuumsselementen nachgerechnet. Ein Vergleich der Ergebnisse ist in den Abbildungen 10.54 und 10.55 (auf Seite 164) wiedergegeben.

Die blauen offenen Kreise in diesen beiden Abbildungen sind das Ergebnis der 30 Kohäsivmodellrechnungen. Die blauen Quadrate wurden durch 30 Kontinuumsmodellrechnungen erzielt, denen die Versagenswerte aus der Grundverteilung der Kohäsivmodellproben übergeben wurden und die roten Quadrate entstammen einer Serie von 30 Proben, die ebenfalls mit dem Kontinuumsmodell berechnet wurden, deren Grenzfestigkeiten aber neu mit der gleichen Grundverteilung generiert wurden (nominell zu den ersten Proben gleich). Es wird dabei deutlich, daß die beiden nominell gleichen Serien mit dem Kontinuumsmodell sehr gut übereinstimmen, während die Ergebnisse der Kohäsivmodellrechnungen dagegen stark gekippt sind. Die Serie der roten Quadrate wurde dann erneut berechnet, indem diesmal das GP-MW-Kriterium als Versagenskriterium eingesetzt wurde. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist in den Abbildungen durch rote Sterne wiedergegeben.

Der Vergleich bestätigt, daß das GP-Mittelwert-Kriterium in Verbindung mit dem Kontinuumsmodell tatsächlich die mit dem Kohäsivmodell erzielten Verteilungen in guter Näherung wiedergibt.

Als Fazit dieser Untersuchung sei hier festgestellt, daß das Versagenskriterium für die mittlere Elementspannung im Kontinuumsmodell Ergebnisse liefert, die für Vergleiche mit dem Kohäsivmodell besser geeignet sind, als das sonst angewandte 1-GP-Kriterium. Sieht man jedoch vom Vergleich zwischen den Modellen ab, so ist die Wahl des Versagenskriteriums willkürlich. In Hinblick auf einen Vergleich mit Bruchexperimenten an TiAl-Proben, bei denen sprödes Materialversagen beobachtet wurde, wird ein Versagenskriterium nahe gelegt, das diesem Verhalten Rechnung trägt. Für die im nächsten Abschnitt vorgestellte Simulation taillierter Proben wurde deshalb das 1-GP-Kriterium verwandt, bei dem ein Element versagt, wenn die kritische Spannung bereits an einem Integrationspunkt erreicht wird, weil damit eine möglichst geringe Verformung der Elemente vor Bruch erzielt wird.

6.3 Rechnungen für taillierte Flachzugproben

Für das Material (Ti-47 Al-2 Cr-0.2 Si), welches die größte Kornstruktur aller untersuchten Materialien aufweist (Korndurchmesser ca $20 \mu\text{m}$), liegen die detailliertesten Beobachtungen des Versagensverhaltens vor. Dieses Material eignet sich deshalb besonders gut zum Vergleich mit mesoskaligen rechnerischen Modellen. Experimentelle Ergebnisse liegen dafür an taillierter Mikroflachzugproben vor.

An Außenflächen von taillierten Proben dieses Materials wurde mit Hilfe von REM außerdem die *post-mortem*-Mikrorißdichte in Abhängigkeit vom Abstand zur Bruchkante ermittelt, um die Spannungsabhängigkeit der Rißhäufigkeit zu erfassen, wozu sich diese Probengeometrie sehr gut eignet. Leider liegen für dieses Material keine Versuche an unterschiedlich großen Proben vor, so daß der Probengrößeneffekt in diesem Fall nicht bekannt ist.

Die vorliegende Untersuchung schließt Untersuchungen an taillierten Modellflachzugproben ein. Besonders die Beobachtungen der Mikrorißdichte in Abhängigkeit von der Bruchkante können hierzu wichtige Modellierungshinweise liefern.

Da die Bruchkante dieser Proben sich aufgrund der ausgeprägten Querschnittsschwächung immer im Kerbgrund, d. h. in Probenmitte, befindet, kann in den Modellrechnungen die Rißhäufigkeit ersatzweise in Abhängigkeit vom Abstand zur Probenmitte ermittelt werden, wodurch die unbeantwortete Frage der Lokalisierung des Risses umgangen werden kann.

Die Modellierung taillierter Proben erfolgt ausschließlich mit versagenden Kontinuumselementen, da das Kohäsivmodell aufgrund der in Kapitel 4.2.4 gemachten Einschränkungen bzgl. seiner Formulierung erst nach Modifikation anwendbar wäre.

6.3.1 Diskretisierung der taillierten Probenfläche

Wegen des stochastischen Ansatzes, nach dem die mikrostrukturelle Unordnung von statistisch verteilten lokalen Versagenswahrscheinlichkeiten erfaßt wird, wird eine gleichmäßige Elementierung der Probe angestrebt. Zur Erzeugung eines solchen Elementnetzes wird zuerst ein regelmäßiges Knotengitter erzeugt, welches die Geometrie des Meßbereichs einer taillierten Flachzugprobe (s. Abbildung 2.1) wiedergibt. Anschließend werden diese Knoten durch schiefwinklige ebene 4-Knoten-Kontinuumselemente miteinander verbunden.

Die taillierte Probengeometrie macht es nötig, unterschiedlich große Elemente zu generieren. Zur Auswahl steht dabei nur, die Elemente innerhalb einer Schicht, die senkrecht zur Zugrichtung steht, oder entlang der Zugrichtung unterschiedlich groß zu gestalten. Im ersten Fall repräsentieren Elemente mit gleichem Abstand zur Bruchkante im Versagensfall unterschiedliche Mikrorißdichten. Im zweiten Fall erzeugen gebrochene Elemente, die unterschiedliche Abstände zur Bruchkante haben, unterschiedliche Mikrorißdichten. Hier wird der letzte Fall vorgezogen und die Elemente werden so generiert, daß Elemente mit gleichem Abstand zur Bruchkante auch gleiche Mikrorißdichten repräsentieren.

Dazu wird die Probe zur Erzeugung des zugrundeliegenden Knotengitters in Zugrichtung in äquidistante gerade Linien unterteilt, wobei jede Linie eine Knotenreihe erhält. Senkrecht zur Zugrichtung ist die Probenbreite variabel. Der seitliche Probenrand ist als Funktion des Krümmungsradius und dessen Mittelpunkt gegeben. Die Randknoten jeder Knotenreihe werden auf den Schnittpunkt der Gerade der jeweiligen Knotenreihe mit dem Probenrand gelegt, so daß der tatsächliche Randverlauf immer dem System einbeschrieben ist. Jede dieser Knotenreihen wird wiederum äquidistant unterteilt und alle Schichten erhalten eine gleiche Anzahl Knoten. Je weiter eine Knotenreihe in Zugrichtung vom Mittelpunkt der Probe entfernt ist,

desto größer sind somit die Abstände der Knoten untereinander senkrecht zur Zugrichtung, wodurch die Elemente mit zunehmender Entfernung vom Probenkerb, unter Beibehaltung ihrer konstanten Elementhöhe, breiter werden.

Die experimentell untersuchten taillierten Proben weisen eine Höhe von 10 mm und an ihren schmalsten Stellen eine Breite von 2 mm auf. Am Belastungsrand oben und unten sind sie 4 mm breit, der Kerbradius beträgt 13 mm . Die Proben werden deshalb durch 5 mal so viele Elemente in Probenlängsrichtung wie quer zur Belastungsrichtung elementiert. Die Elemente im Kerbgrund sind dann ungefähr quadratisch. In jede Richtung wird dabei eine gerade Anzahl Elemente generiert, damit die Symmetrielinien der Proben immer auch Knotenreihen sind und keine künstliche Asymmetrie bei Fesselung eines einzigen Knotens quer zur Belastungsrichtung entsteht. Gleichzeitig wird damit sichergestellt, daß die schmalste Stelle nicht in einer einzelnen Schicht abgebildet wird. Auf Seite 107 in Abbildung 6.1 ist links die erzeugte Elementierung in der Größe 20×100 Elemente gezeigt. (Eine zweite, breitere taillierte Probengeometrie, für die es kein experimentelles Pendant gibt, wird zu Vergleichen herangezogen, Abbildung 6.1 rechts.)

Da die mittlere Korngröße des Materials etwa $20\text{ }\mu\text{m}$ mißt, wären zu einer adäquaten Modellierung etwa 100 Elemente an der schmalsten Stelle der Modellprobe nötig und die Probe müßte etwa 500 Elemente hoch sein. Wegen des hohen Rechenaufwands schon bei Ensembles kleinerer Proben, werden die Modellrechnungen mit weniger Elementen durchgeführt und der Probengrößeneinfluß mit Hilfe bereits gezeigten Skalierungsmethoden abgeschätzt.

Vor diesem Hintergrund erscheint es auch vertretbar, daß die Elementflächen an unterschiedlichen Stellen der Modellproben verschieden große Mikrostrukturbereiche repräsentieren.

6.3.2 Untersuchte Probenserien

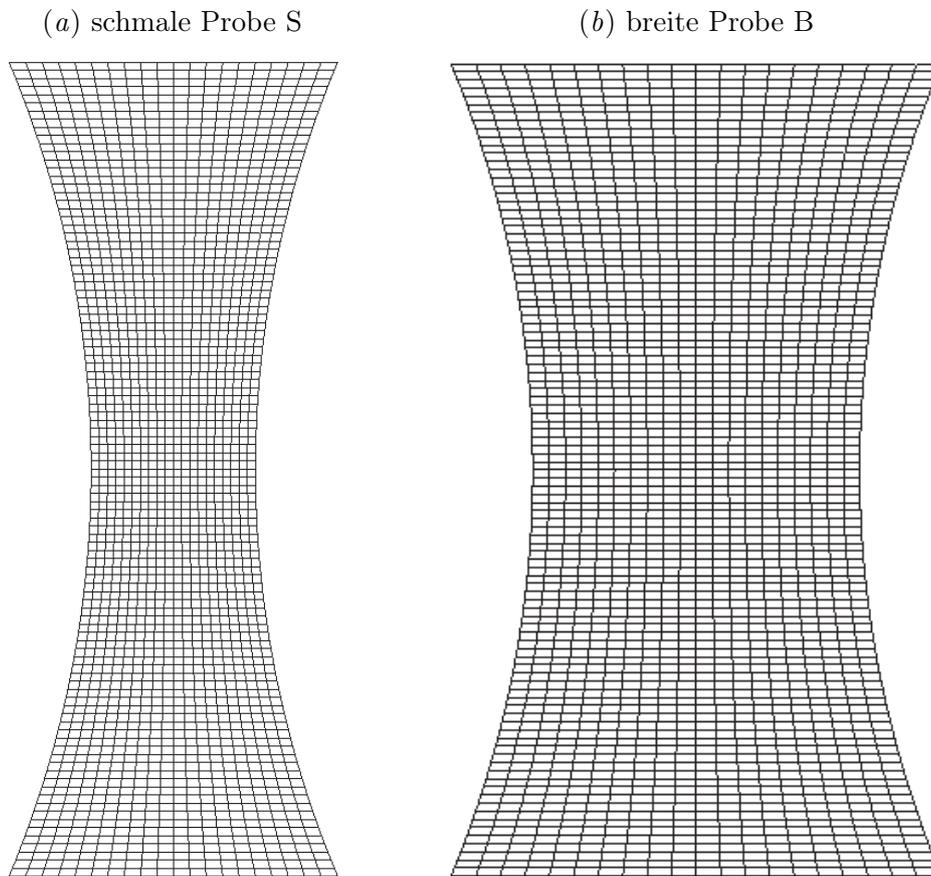
Untersucht werden 2 Probengeometrien jeweils unterschiedlicher Elementgrößen mit insgesamt 3 Grundverteilungen für die Versagensspannungen. Für alle Modellproben wird einheitliches elastisches Materialverhalten bis zum Bruch gewählt. Als elastische Materialparameter werden $E=180\text{ GPa}$ und $\nu=0.3$ verwendet. Wegen der geringen Probendicke wird ebener Spannungszustand angenommen.

Die in Abschnitt 6.3.1 beschriebene, der experimentellen Probe nachgebildete Geometrie wurde als eine der beiden Probengeometrien gewählt und als „schmale Probe“ bezeichnet. Das Breitenverhältnis $\kappa = B_{Rand}/B_{Kerb}$ dieser Probengeometrie beträgt 2.

Zu Vergleichszwecken wurde eine zweite, ähnliche Probengeometrie gewählt, die sich in ihrer Breite von der ersten unterscheidet, aber den gleichen Kerbradius besitzt. Diese hat die Breitenabmessungen 4 und 6 mm (Rand bzw. Kerb), das Breitenverhältnis, κ , beträgt somit 1.5. Sie wird mit gleich vielen Elementen wie die schmalere Probe erzeugt, so daß die einzelnen Elemente breiter ausfallen. Der Sinn dieser Probengeometrie besteht darin, sie den untaillierten Proben ähnlicher zu machen und damit den Einfluß, den der Spannungsgradient bei den taillierten Proben ausübt, untersuchen zu können. Abbildung 6.1 zeigt die beiden Probengeometrien mit einer Elementierung von $N \times M = 20 \times 100$ Elementen.

Um den Einfluß der Grundverteilung beurteilen zu können, werden drei verschieden breite Grundverteilungen (vgl. Gl. (3.44)) angewandt: $\zeta=5, 10$ und 20 . Um Größeneffekte untersuchen zu können, muß für jede Probengeometrie mindestens eine Grundverteilung in mehreren Elementierungsverfeinerungen angewendet werden. Wegen des Rechenaufwands je Probenserie, wird dabei weitgehend auf Überschneidungen verzichtet.

Abbildung 6.1: FE-Diskretisierung der taillierten Proben



In Tabelle 6.5 sind die berechneten Probenserien und die entsprechenden Ensemblegrößen (Anzahl Rechnungen) zusammengefaßt. Bis auf die außerordentlich rechenintensiven Rechnungen für die breiteste Verteilung, $\zeta=20$, bei gleichzeitig starker Elementierung, $NM=8000$ und 18 000 Elemente, umfaßt jedes Ensemble 100 nominell gleiche Proben. Die Probenbezeichnungen wurden zur besseren Unterscheidung und Referenzierung in den Bildern und Tabellen systematisiert: „B“ bzw. „S“ steht für „breite Probe“ bzw. „schmale Probe“, die Größenbezeichnungen, 20, 30, 40 usw. bezeichnen die Anzahl der Elemente in Breitenrichtung, die aufgrund des Verhältnisses $H/B=5$ die Anzahl der Elemente in Probenlängsrichtung impliziert, und „v1“, „v2“ und „v4“ bezeichnen die verwendete Verteilungsbreite, ζ , wobei die einstelligen Größen „v“ mit ζ durch $v=\zeta/5$ verknüpft sind.

6.3.3 Schädigungsentwicklung und Versagen

Bei Belastung der Proben zeigen sich zunächst diffus auftretende Einzelrisse, dann tritt Lokalisierung zum makroskopischem Bruch ein. Die Lokalisierung geschieht dabei, ohne daß weitere äußere Laststeigerung notwendig wäre, allein aufgrund der inneren Lastumlagerungen infolge vorangehender Bruchvorgänge. Das Kraftmaximum und die Entwicklung des Durchbrechens infolge kaskadenartigen Rißwachstums ist in den Bildern von Abbildung 10.67 für ein Beispiel zu sehen. (Die Kurven in den Abbildungen 10.12 und 10.13 beziehen sich auf diese Probe.)

Tabelle 6.5: taillierte Modellproben, Probenbezeichnungen

Probengröße (Anzahl Elemente), Grundverteilung, Ensemblegröße (Anzahl Proben)
 alle Proben: $a=400$, $c=\zeta a$, $d=0.5$, $M:N=5$, ($v=\zeta/5$)

	schmale Proben, „S“ $\kappa=B_R/B_K=2$			breite Proben, „B“ $\kappa=B_R/B_K=1.5$				
Probengröße N (Anzahl Elem.) M	20	30	40	10	20	30	40	60
	100	150	200	50	100	150	200	300
Verteilung $\zeta=5$	100	100	100	100				
Bezeichnung „v1“	S20v1	S30v1	S40v1	B20v1				
Verteilung $\zeta=10$	100	100		100				
Bezeichnung „v2“	S20v2	S30v2		B20v2				
Verteilung $\zeta=20$	100			100	100	100	54	12
Bezeichnung „v4“	S20v4			B10v4	B20v4	B30v4	B40v4	B60v4

6.3.4 Bruchlasten und makroskopische Bruchspannungen

Die Bruchkraft war als maximal auftretende Zugkraft der Probe definiert worden, die Bruchspannung als Bruchkraft bezogen auf die Probenbreite. Für die taillierten Proben wird die Probenbreite als die Breite der Probe an ihrer schmalsten Stelle definiert, so daß die Bruchspannungen durch

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{B_{\min}} \quad (6.7)$$

gegeben sind, wobei die Breite des unverformten Systems verwendet wird.

Verteilung der makroskopischen Bruchspannungen

Wie zu erwarten war, zeigt eine Serie nominell gleicher Proben eine Streuung in ihren makroskopischen Bruchspannungen. Diese Streuung ist umso größer, je breiter die Grundverteilung der Elementfestigkeiten gewählt wurde. Der Mittelwert der makroskopischen Bruchspannungen steigt mit der Breite der zugrundeliegenden Grundverteilung deutlich an. In den Tabellen 6.6 und 6.7 sind die Mittelwerte der Bruchspannungen und ihre Streuungen für die einzelnen Probenserien zusammengefaßt.

Tabelle 6.6: schmale taillierte Proben ($\kappa=2$), makroskopische Bruchspannungen

Absolute Werte F_{\max}/B_{\min} [MPa]

	S20v1	S30v1	S40v1	S20v2	S30v2	S20v4
MW	617.5	593.5	586.4	972.6	922.4	1718.9
SA	50.6	49.7	41.5	86.0	67.6	164.3
Min	488	441	469	743	754	1344
Max	747	688	662	1165	1051	2168

Tabelle 6.7: breite taillierte Proben ($\kappa=1.5$), makroskopische Bruchspannungen

Absolute Werte F_{\max}/B_{\min} [MPa]						
	B20v1	B20v2	B10v4	B20v4	B30v4	B40v4
MW	559.9	858.6	1594.7	1486.8	1395.6	1340.8
SA	44.3	77.4	211.7	150.4	120.1	119.1
Min	427	624	1059	1073	997	1023
Max	646	1005	2079	1783	1727	1529

Es zeigt sich weiterhin, daß die Probengeometrie einen deutlichen Einfluß auf das Bruchverhalten ausübt. Dabei zeigen die stärker taillierten Proben ($\kappa=2$) eine höhere mittlere Bruchspannung als die Proben mit geringerer Einkerbung ($\kappa=1.5$), und auch die Streuung der Bruchspannungen ist bei den stärker taillierten Proben geringfügig größer als bei den Proben mit geringerer Querschnittsänderung.

Die Veragenswahrscheinlichkeitsverteilung $P(\sigma)$ für alle Modellproben (mit Ausnahme der 12 Proben B60v4) ist in Abbildung 10.56 gezeigt.

Probengrößeneffekt

Von jeder der beiden Probengeometrien wurden Probenserien berechnet, die sich in der Anzahl der Elemente unterschieden. Es zeigte sich, daß anders als bei homogenem Materialverhalten neben der Probengeometrie auch die Elementierung einen Einfluß auf das Bruchverhalten einer Probe hat. Wurden mehr, und damit kleinere, Elemente zur Elementierung einer Probe gewählt und damit eine höhere Anzahl diskreter Einzelfestigkeiten, verringerten sich sowohl die makroskopische Probenbruchspannung als auch ihre Streuung. Bei breiter gewählten Grundverteilungen nahm dabei die makroskopische Festigkeit deutlich stärker ab, wenn die Elementanzahl erhöht wurde, als bei schmaler gewählter Grundverteilung.

Weakest-link-Skalierungen

Nach Gl. (4.25) wurden die Veragenswahrscheinlichkeitsverteilungen aus Abbildung 10.56 wie in Gl. (6.5) für jede Probengeometrie und jede Grundverteilungsfunktion jeweils auf die Größe $NM=2000$ skaliert, d. h. auf die Elementierung mit 20×100 Elementen. Werden von allen Grundverteilungsfunktionen, von denen mehr als eine Elementierungsgröße durch eine Probenserie berechnet wurde, geplottet (s. Abbildung 10.57), so ist deutlich zu sehen, daß diese weakest-link-Skalierungsmethode gerade auch bei den vorliegenden komplizierteren Vorgängen anwendbar ist, solange eine Mindestgröße für NM nicht unterschritten wird. Offensichtlich ist demnach eine Elementierung mit $N \times M=10 \times 50$ Elementen, wie bei der Probenserie B10v4 verwendet, zu gering, während bei allen feineren Elementierungen, d. h. höherer Elementanzahl, diese Skalierung gelingt.

In einem weiteren Schritt werden nun Proben mit gleicher Grundverteilung aber unterschiedlicher Geometrie miteinander verglichen. Dazu werden einmal die breiten Proben mit breiter Grundverteilung, Proben B10v4 – B40v4 (vgl. Tabelle 6.5), mit den schmalen Proben derselben Grundverteilung, S20v4, und zum anderen die schmalen Proben mit schmaler Grund-

verteilung, S20v1 – S40v1, mit den breiten Proben derselben Grundverteilung, B20v1, verglichen. Alle Verteilungen von Proben, deren Probengröße nicht bereits aus 20×100 Elementen besteht, werden zuvor mittels der *weakest-link*-Skalierung, Gl. (4.25), auf die Einheitsgröße 20×100 skaliert.

Die auf Einheitsgröße skalierten Bruchspannungsverteilungen dieser Probenserien sind in Abbildung 10.58 dargestellt. Zu sehen sind dabei die gut zusammenfallenden Verteilungen einmal der schmalen und einmal der breiten Proben und die trotz Skalierung weit abgeschlagene Verteilung der breiten Proben aus 10×50 Elementen (blaue Quadrate), die alle bereits in Abbildung 10.57 gezeigt wurden. Daneben kann man die Bruchspannungsverteilungen der entsprechenden Proben abweichender Geometrie aber gleicher Grundverteilungsvorschrift, d. h. Proben S20v4 (gelbe Sternchen mit dunklem Rand) und B20v4 (gelbe Quadrate mit grünem Rand), sehen, die deutlich nicht mit den beiden übrigen Ensembles zusammenfallen.

Damit zeigt sich, daß ein grundlegender geometrieabhängiger Unterschied in den makroskopischen Antworten auf die gleichen Grundverteilungen besteht. Während die *weakest-link*-skalierten Verteilungen für gleiche Probengeometrien praktisch zusammenfallen, zeigen Probenserien, die zwar die gleiche Grundverteilung und Skalierung aufweisen, aber mit abweichender Probengeometrie berechnet wurden, eine signifikante Verschiebung ihrer Bruchspannungsverteilung. Modellproben mit stärkerer Taillierung, $\kappa=2$ weisen höhere Bruchspannungswerte auf, als Proben mit schwächerer Einschnürung, $\kappa=1.5$, d. h. Modellproben der B-Serie.

6.3.5 Schädigung

Bei realen Flachzugproben wurde die Schädigung dadurch bestimmt, daß die Mikrorißdichte an den gebrochenen Proben ausgezählt wurde, wobei die Rißdichte an der Bruchkante selbst nicht mitgerechnet werden kann. Diese Definition ist bei den modellierten Proben schlecht möglich, da die Rechnungen nicht bis zum kompletten Probendurchbruch durchgeführt wurde. Und selbst wenn eine Bruchschicht ermittelt würde, würde die Vernachlässigung einer ganzen Elementschicht nur dann Sinn ergeben, wenn die Anzahl der verwendeten Elemente ungefähr der Anzahl von Korngrenzen entspräche.

Um wenigstens die Vergleichbarkeit der Modellergebnisse untereinander zu erreichen, wird die Schädigung der Modellproben dadurch definiert, daß die Fläche der gebrochenen Elemente ins Verhältnis zur Gesamtfläche der Probe gesetzt wird. Der Flächenanteil wird dabei am unverformten System berechnet.

Da bei den zuerst berechneten Probenserien keine prozentualen Flächenanteile berechnet wurden, sondern nur die Anzahl der gebrochenen Elemente festgehalten wurde, war es von Interesse, ob eine Nachberechnung aufgrund der Lage der gebrochenen Elemente vorgenommen werden muß. Abbildung 10.59 zeigt bei den Probenserien, bei denen die gebrochene Fläche mitprotokolliert wurde, den Zusammenhang zwischen dem prozentualen Anteil der Zahl der gebrochenen von allen Elementen und dem prozentualen Probenflächenanteil, der durch die gebrochenen Elemente abgedeckt wird. Die Abbildung zeigt einen weitgehend linearen Zusammenhang zwischen diesen beiden Werten. Es erscheint somit ausreichend, statt des Flächenanteils näherungsweise den Elementanteil als Bruchschädigung zu vergleichen. Wegen der Zunahme der Elementgröße mit dem Abstand von der Probentaille ist der prozentuale Flächenanteil etwas kleiner als der prozentuale Elementanteil; er beträgt in etwa das 0.9-fache des Elementanteils.

Bruchschädigungsverteilungen und Größeneffekte

In den Tabellen 6.8 und 6.9 sind die Bruchschädigungen der Modellproben von Tabelle 6.5 angegeben. Dabei zeigt sich, daß die Aussagen, die in Abschnitt 6.3.4 für die Bruchspannungen

Tabelle 6.8: schmale taillierte Proben ($\kappa=2$), Bruchschädigung

gebrochene Elemente bei Kraftmaximum						
	S20v1	S30v1	S40v1	S20v2	S30v2	S20v4
absolute Anzahl [Stück]						
MW	13.6	22.4	35.1	29.3	49.9	43.9
SA	6.9	10.8	17.3	10.5	15.3	12.8
Min	2	1	4	7	19	20
Max	33	53	93	57	89	78
relativer Anteil [% von allen Elem.]						
MW	0.679	0.494	0.439	1.466	1.108	2.194
SA	0.344	0.240	0.216	0.527	0.340	0.638
Min	0.10	0.02	0.05	0.35	0.42	1.00
Max	1.65	1.18	1.16	2.85	1.98	3.90

Tabelle 6.9: breite taillierte Proben ($\kappa=1.5$), Bruchschädigung

gebrochene Elemente bei Kraftmaximum						
	B20v1	B20v2	B10v4	B20v4	B30v4	B40v4
absolute Anzahl [Stück]						
MW	9.42	25.56	12.68	38.93	70.56	104.93
SA	5.7	9.1	5.2	11.3	20.3	28.0
Min	1	7	3	15	23	36
Max	25	49	29	70	123	169
relativer Anteil [% von allen Elem.]						
MW	0.471	1.278	2.536	1.947	1.568	1.312
SA	0.287	0.455	1.032	0.566	0.450	0.350
Min	0.05	0.35	0.60	0.75	0.51	0.45
Max	1.25	2.45	5.80	3.50	2.73	2.11

getroffen wurden, auch für die Schädigungen zum Zeitpunkt der maximalen Randlast gelten: Die mittlere Bruchschädigung steigt

- mit der Breite der Grundverteilung, ζ ,
- bei gleichbleibender Grundverteilung reziprok mit der Feinheit der Elementierung und
- mit zunehmender Querschnittsänderung, d. h. wachsendem κ -Wert.

Die Streuung der Bruchschädigung verhält sich ähnlich wie der Mittelwert: Die Streuung wird größer, wenn die Grundverteilung breiter gewählt wird, wenn eine gröbere Elementierung verwendet wird und wenn die Modellprobe eine stärkere Einkerbung aufweist.

Die Verteilungen der Bruchschädigungen aller Serien von Modellproben sind in Abbildung 10.60 auf Seite 167 gezeigt. Auffallend ist der allgemein niedrige untere Schädigungsanteil, der bei allen Proben zwischen 0 und 1% liegt, und daß diese unteren Werte der Verteilungen in etwa konstant bleiben, wenn nur die Elementanzahl variiert wird (vgl. auch Tabellen 6.8 und 6.9).

Während die Bruchspannungsverteilungen bei breiteren Grundverteilungen stark verschoben werden und dabei nur schwach in die Breite gestreckt werden, bei unterschiedlichen Geometrien sogar fast ausschließlich verschoben sind, erscheinen die Schädigungsverteilungen hauptsächlich gekippt zu werden, d. h. der obere Bereich wird in die Länge gezogen. Am deutlichsten wird das, wenn alle Serien mit der geringeren Einkerbung, $\kappa=1.5$, d. h. Serie „B“, und der breitesten Grundverteilung betrachtet werden (Abbildung 10.61); hier werden noch zusätzlich Ergebnisse einer weiteren Probenserie der Elementierung $N \times M=60 \times 300$ Elemente gezeigt, von der lediglich 12 Modellproben berechnet wurden.

***Weakest-link*-Skalierungen**

Skaliert man, wie zuvor schon die Bruchspannungen, die in Abbildung 10.60 gezeigten Verteilungen der Bruchschädigungen nach Gl. (4.25) einheitlich auf $NM=2000$ und vergleicht die Serien, die in jeweils mehreren Elementierungen vorliegen, das sind die Serien B20v4 – B60v4, S20v2 und S30v2 und S20v1 – S40v1, siehe Abbildung 10.62 auf Seite 168, so wird deutlich, daß auch bei den Bruchschädigungen die Elementierungsgröße skalierbar ist. Bedingt durch die Versagensmodellierung, die nur das Versagen von ganzen Elementen zuläßt, erscheint die Funktion infolge der großen Elemente allerdings noch sehr stufig und weniger glatt. Es zeigt sich auch hier, daß die Verteilung stark von der gewählten Grundverteilung abhängt.

Abbildung 10.63 zeigt die Bruchschädigungen von Probenserien unterschiedlicher Geometrie analog zur in Abbildung 10.58 dargestellten Form ihrer Bruchspannungsverteilungen. Wiederum werden die auf Einheitsprobengröße $NM=2000$ skalierten Bruchschädigungsverteilungen von zwei Probengeometrien und zwei Grundverteilungsbreiten zusammen dargestellt: zum einen die Verteilungen der breiten Probenserien, B, mit breiter Grundverteilung, $\zeta=20$ (v4), zusammen mit der Verteilung der stärker taillierten Serie S20v4, und zum zweiten die Verteilungen der schmalen Probenserien, S, mit schmaler Grundverteilung, $\zeta=5$ (v1), zusammen mit der Schädigungsverteilung der breiten Proben gleicher Grundverteilung, B20v1.

Deutlich sind wiederum die beiden abgegrenzten Bereiche zu erkennen, die aus den beiden unterschiedlich breiten Grundverteilungen resultieren. Die mit der *weakest-link*-Skalierung erzeugten Schädigungsverteilungen der Proben einheitlicher Geometrie und Grundverteilungsvorschrift, also einmal B20v4 – B60v4 und zum anderen S20v1 – S40v1, fallen nicht ganz so exakt zusammen wie die entsprechenden Kurven der skalierten Bruchspannungsverteilungen in Abbildung 10.58. Wie sich am Vergleich der Kurve der Serie B20v4 (schwarze Rechtecke) mit der Kurve S20v4 zeigt, sind die Abweichungen der Schädigungsverteilungen unterschiedlicher Geometrie, weniger ausgeprägt, als die Abweichungen der Bruchspannungen bei unterschiedlicher Geometrie. Es zeigt sich also, daß der Geometrieinfluß bei den Bruchschädigungen deutlich schwächer ausgeprägt ist, als bei den Bruchspannungen.

Verteilung der Schädigung über die Probenhöhe

Bei den elektronenmikroskopisch untersuchten realen taillierten Flachzugproben hatte sich deutlich ein Zusammenhang zwischen der Mikrorißdichte und dem Abstand von der Bruchkante gezeigt. Die Bruchkante befand sich dabei immer an der schmalsten Probenstelle. Die

Mikrorißdichte nahm mit dem Abstand von der Bruchkante ab. Oberhalb eines gewissen Abstands von etwa 2–2.5 mm von der Bruchkante fanden sich überhaupt keine Mikrorisse mehr.

Um eine Aussage über das Mikrorißabstandsverhalten der Modellproben machen zu können, wurde der Betrag des Abstandes zur Kerblinie für jedes gebrochene Element berechnet, wobei der Elementschwerpunkt als Elementkoordinate verwendet wurde. Auf diese Weise lassen sich für den Bruchzeitpunkt, also den Zeitpunkt maximaler Reaktionskraft, für jede Modellprobe summarische Abstandskennwerte angeben. Die summarische Auswertung wird hierbei deshalb gewählt, weil die Auswertung des Abstands jedes gebrochenen Elements für jede der 100 Proben einer Serie nicht zu überschaubaren Ergebnissen führen würde.

Als summarische Werte jeder Modellprobe wurde während des Rechenlaufs zum einen in jedem Recheninkrement der Abstand ausgegeben, den das weitest von der Kerblinie entfernte Element hatte. Weiterhin wurde ein mittlerer Abstand aller gebrochenen Elemente berechnet, indem der Abstand des Schwerpunkts

$$\bar{y}_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \quad (6.8)$$

des gebrochenen Systemanteils festgestellt wurde. Hierbei sind die y_i die Beträge der Elementschwerpunktsabstände und A_i die zugehörigen Elementflächen aller I gebrochenen Elemente. Aufgrund der gewählten Elementierung kann hierbei kein Abstand auftreten, der kleiner ist als der Abstand einer halben Elementhöhe h/M , wobei M die Anzahl der Elemente parallel zur Zugrichtung ist und h die Probenhöhe.

In Abbildung 10.64 auf Seite 169 ist der nach Gl. (6.8) berechnete mittlere Abstand der gebrochenen Elemente bei F_{\max} für alle die Proben gezeigt, bei denen er bei den Rechenläufen ausgegeben wurde, und in Tabelle 6.10 sind diese Werte tabellarisch zusammengestellt.

Tabelle 6.10: mittlere Mikrorißausbreitung der Modellproben
mittlerer Abstand der gebrochenen Elemente von der Probentaille [mm]

	S20v1	S30v1	S40v1	S20v2	S30v2	S20v4	B20v1
MW	1.10	1.03	0.98	1.63	1.55	1.93	1.48
SA	0.31	0.25	0.21	0.36	0.25	0.30	0.54
Min	0.34	0.46	0.47	0.61	0.82	1.17	0.15
Max	1.79	1.82	1.44	2.69	2.36	2.46	2.90

Betrachtet man nur die Proben mit stärkerer Querschnittsänderung, Serie S, für die die summarischen Bruchabstände aller Ensembles erfaßt sind, läßt sich der Einfluß der Grundverteilungsbreite auf die Schädigungsausbreitung gut dokumentieren.

Alle Modellproben mit einer schmalen Grundverteilung zeigen geringere Schädigungsausbreitung als die Modellproben mit einer breiteren Grundverteilung, ohne daß dies zu signifikant geringerer Streuung der Mikrorißverteilung über die Probenmeßfläche führt. Mit zunehmender Elementanzahl nehmen aber sowohl der Mittelwert als auch die Streuung der Mikrorißausbreitung geringfügig ab.

Betrachtet man isoliert die Abstände der geschädigten Elemente mit maximalem Abstand zur Probentaille jeder der Proben, wie sie in Abbildung 10.65 auf Seite 169 und in Tabelle 6.11 wiedergegeben sind, so bestätigt sich sehr deutlich, daß die gewählte Grundverteilung

Tabelle 6.11: maximale Mikrorißausbreitung der Modellproben
 maximaler Abstand der gebrochenen Elemente von der Probenaille [mm]

	S20v1	S30v1	S40v1	S20v2	S30v2	S20v4	B20v1
MW	2.29	2.38	2.50	4.04	4.27	4.59	2.95
SA	0.78	0.74	0.57	0.78	0.57	0.40	1.27
Min	0.55	0.70	0.88	1.15	2.57	3.15	0.45
Max	4.75	4.50	3.82	4.95	4.97	4.95	4.95

erheblichen Einfluß auf den Ort der Schädigung ausübt. Während sich nämlich bei breit gewählter Grundverteilung die Bruchereignisse über die ganze Probenhöhe verteilen, d. h. es brechen jeweils Elemente bis hin zum Probenrand, konzentrieren sich die Mikrorisse bei schmaler gewählter Grundverteilung deutlich auf den mittleren Probenbereich, was sich daran zeigt, daß nur bei wenigen Modellproben überhaupt Elemente, die weiter als 3.2 mm von der Kerblinie entfernt liegen, gebrochen sind. Daß sich die Bruchereignisse bei Probengeometrien mit geringerer Querschnittsänderung stärker über die gesamte Probenhöhe verteilen (Serie B20v1 in Abbildung 10.65) leuchtet dabei ohne weitere Untersuchung ein.

In Kapitel 8.2 und Abbildung 10.80 wird ein Vergleich des Schädigungsabstandes der Probenreihen S20v1 und S30v1 mit experimentell ermittelten Werten gezeigt.

6.3.6 Ergänzende Untersuchung zum Rißabstand

Bei der Auswertung der maximalen Rißabstände, Abbildung 10.65, fiel auf, daß einzelne Modellproben schmaler Grundverteilung weit von Kerbmitte entfernt noch Elementbrüche aufwiesen.

Um die Ursache dieser Brüche aufzuklären, wurde die Probe der Serie S20v1 herausgesucht, bei der ein Element fast 5 mm von der Kerblinie entfernt gebrochen war. Für diese Probe, Probe Nr. 64 dieser Serie, wurde das Lastinkrement herausgesucht, bei dem dieses Element brach. Die Versagensgrenzspannung des fraglichen Elements lag mit 428 MPa nur geringfügig über der Generierungsgrenze von 400 MPa. Für den zugehörigen Probenzustand wurde ein Netzplot erstellt, in dem die Lage der versagten Elemente zu erkennen war und die Spannungen im unteren Generierungsbereich zwischen 400 MPa und 500 MPa farblich abgestuft dargestellt sind. Alle Spannungen bis 400 MPa wurden blau dargestellt und alle Spannungen über 500 MPa rot. Im Zwischenbereich wurden die Farben entsprechend den Spannungen interpoliert. Diese Darstellung ist in Abbildung 10.66 auf Seite 170 wiedergegeben. Dabei ist deutlich zu sehen, daß das fragliche Element gerade so in der Probenmitte liegt, daß es von dem schmalen Streifen leicht erhöhter Spannung überdeckt wird und deshalb aufgrund seiner niedrigen Grenzspannung bricht.

Eine Darstellung des weiteren Spannungs- und Schädigungsverlaufs innerhalb der gleichen Probe bei Erreichen des Kraftmaximums und das anschließende kaskadenartige Versagen ist in Abbildung 10.67 dokumentiert.

6.3.7 Interpretation der Ergebnisse und Folgerungen

Wird eine Probe durch eine höhere Anzahl von Elementen beschrieben, sind aber alle übrigen Modellierungsparameter gleich, d. h. gleiche Probengeometrie und gleiche Grundverteilung der

Elementfestigkeiten, verringern sich die Bruchspannung und -schädigung und deren Streuungen. Dieser Probengrößeneffekt zeigte sich bei allen Modellproben die mit den FE-Modellen berechnet wurden, also sowohl bei den Rechnungen der Proben ohne Querschnittsänderung mit dem Kohäsivgesetz wie auch mit versagenden Kontinuumselementen, als auch bei den taillierten Proben.

Eine Erklärung für diesen Probengrößeneffekt, bei dem zunehmende Elementierungsverfeinerung zu niedrigeren Bruchspannungen führt, ergibt sich aus der höheren Dichte der aufeinanderfolgenden Grenzfestigkeitswerte, wenn diese nach ihrer Größe sortiert werden. Vor der Initiierung des ersten Mikrorisses nimmt die Wahrscheinlichkeit, daß es ein Element mit besonders geringer Festigkeit gibt, mit wachsender Elementanzahl zu. Nach Initiierung des ersten Mikrorisses sind für das weitere Versagensgeschehen nicht allein die Festigkeiten maßgeblich, sondern auch die Beanspruchungen infolge der Probendeformation und den damit einhergehenden Spannungskonzentrationen. Hierbei nimmt die Wahrscheinlichkeit zu, ein besonders schwaches Element in exponierter Position anzutreffen, wenn mehr Elemente zur Verfügung stehen. Speziell bei der taillierten Probengeometrie läßt sich die Abnahme des mittleren Abstandes der Schädigung von der Kerblinie bei zunehmender Elementanzahl, vgl. Tabelle 6.10, ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit erklären, daß es in Probenmitte eher ein schwaches Element gibt, wenn insgesamt mehr Elementfestigkeiten vergeben werden.

Daß einhergehend mit der Abnahme der mittleren Bruchspannung auch die mittlere Schädigung abnimmt, wenn mehr Elemente generiert werden, läßt sich leicht dadurch verstehen, daß die Anzahl der Elemente, die für das Probenversagen brechen müssen, bei höherer Elementanzahl aber geringerer Bruchspannung weniger stark zunimmt, als die Gesamtanzahl der Elemente, wodurch der Quotient abnimmt.

Weiterhin wurde gezeigt, daß sowohl die Verteilungen der makroskopischen Bruchspannungen, wie auch der Bruchschädigungen in guter Näherung durch ein *weakest-link*-Skalenverhalten beschrieben werden können, d. h. die Verteilungen für Probenserien verschiedener Elementanzahl, sonst aber gleicher Geometrie und Grundverteilung für die Elementfestigkeiten, lassen sich mit Gl. (4.25) ineinander transformieren. Der Exponent k dieser Gleichung entspricht dabei dem Verhältnis der Elementmengen der Modellproben, deren Verteilungen ineinander transformiert werden (sollen). Dieses Ergebnis, das auch für Proben konstanten Querschnitts gezeigt wurde (siehe Abschnitt 6.2.2), ist neu und kann dazu verwandt werden, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Bruchspannungen und -schädigungen von Ensembles großer Proben, die nur mit unvertretbar hohem Aufwand zu simulieren wären, zumindest abzuschätzen, wodurch Probengrößeneffekte für dieses Modell extrapolierbar werden.

Bereits bei Verwendung des Bündelkettenmodells zeigte sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Breite der Grundverteilung der Faserfestigkeiten und dem Wert der makroskopischen Bruchspannungen: je breiter die Grundverteilung für ansonsten gleiche Bündelketten, desto höher liegt die makroskopische Bruchspannung. Dieses Ergebnis bestätigte sich bei den FE-Modellen sowohl für Proben ohne Querschnittsänderung wie auch für die taillierten Proben.

Bei den taillierten Proben zeigte sich aber darüberhinaus, daß bei gleichen Proben, also gleicher Elementanzahl und gleicher Geometrie, eine breitere Grundverteilung zu einer breiteren Verteilung der Schädigung über die Probenlänge führt als eine schmalere Grundverteilung für die Elementfestigkeiten. Dieser Sachverhalt entspricht einer stärkeren Ausbreitung von Mikrorissen über die taillierte Probenfläche bei zunehmender Breite der Grundverteilung für die Kornfestigkeiten, die ihrerseits, wie gerade oben gezeigt wurde, zu höheren makroskopischen Bruchspannungen führt. Dieser Zusammenhang leuchtet unmittelbar ein und weist somit auf qualitativ angemessenes Modellverhalten hin.

Der Einfluß der Geometrie, im vorliegenden Fall das Verhältnis der Breite am Rand zur Minimalbreite, κ , wurde an den Beispielen für die taillierten Modellproben sichtbar. Dabei zeigte sich eine Abhängigkeit der makroskopischen Bruchspannungen vom Grad der Querschnittsänderung über die Meßlänge: bei weniger stark taillierten Proben, $\kappa=1.5$, bei denen gleich viele Elemente zur Diskretisierung verwendet wurden und die Grundverteilung der Elementfestigkeiten gleich war, fielen die makroskopischen Bruchspannungen niedriger aus, als bei Proben mit stärkerer Querschnittsänderung, $\kappa=2$.

Als Erklärung für diesen Effekt bietet sich wieder die Wahrscheinlichkeit an, ein schwaches Element im Einflußbereich hoher Spannungen zu finden. Nimmt die Probenbreite mit zunehmender Entfernung von der Probenmitte stark zu, nehmen die Spannungen entlang der Probenzugachse entsprechend schneller ab, als wenn die Probe eine weniger akzentuierte Querschnittsänderung aufweist. Der Bereich hoher Spannungen konzentriert sich dabei auf einen kleineren Probenanteil, womit die Wahrscheinlichkeit sinkt, in diesem Bereich eines der schwachen Elemente anzutreffen. In der Folge muß daher die makroskopische Probenspannung erhöht werden, um Elemente zum Brechen zu bringen, was dann entweder dadurch geschieht, daß weniger schwache Elemente zuerst brechen oder daß die makroskopische Spannungssteigerung dazu führt, daß die Spannung in breiteren Probenabschnitten stark genug wird, die dort angesiedelten Elemente entsprechend hoch genug zu belasten.

Bei gleicher Grundverteilung und gleicher Elementanzahl fielen auch die Bruchschädigungen von Proben mit geringerer Querschnittsänderung, $\kappa=1.5$, niedriger aus, als bei Proben mit stärkerer Querschnittsänderung, $\kappa=2$. Dies bedeutet, daß bei geringer taillierten Proben absolut weniger Elemente brechen, bis die Probe ihr Widerstandsmaximum erreicht. Dieser Effekt wird durch die gleichzeitig niedriger ausfallenden makroskopischen Bruchspannungen leicht plausibel, da dadurch weniger Elemente ihre kritische Spannung erreichen.

Vergleicht man nun noch die Bruchspannungen und Schädigungen – bei gleicher Elementierung und bei jeweils der gleichen Grundverteilung – der taillierten Proben, $\kappa=1.5$ und 2, mit den nichttaillierten Proben aus Abschnitt 6.2.2, bei denen das Breitenverhältnis $\kappa=1$ ist, also für $\zeta=5$ die taillierten Proben B20v1 und S20v1 mit den nichttaillierten Proben G20v1, und für $\zeta=20$ die taillierten Proben B20v4 und S20v4 mit den nichttaillierten Proben G20v4, stellt man fest, daß die Verteilungen für $\kappa=1.5$ nicht zwischen denen für $\kappa=1$ und $\kappa=2$ liegen (siehe die Abbildungen 10.68 und 10.69 auf Seite 172). Dies ist überraschend, erwartet man doch eine kontinuierliche Änderung von $\kappa=1$ nach $\kappa=2$.

Der Grund für diese nicht erwartete Reihenfolge ist bislang ebenfalls ungeklärt. Als Erklärung für die Ursache kommen aber nur die Größenverhältnisse der Elemente, also Breite zu Höhe der Elemente, infrage, welche bei den nichttaillierten Proben 1:1 betragen, bei den taillierten Proben davon aber auf unterschiedliche Weise abweichen, da es keine weiteren Unterschiede zwischen den Probenserien jeder der beiden Grundverteilungsbreiten gibt. Offensichtlich besitzt dieses Elementseitenverhältnis also einen statistischen Nebeneffekt, der sich nicht allein durch die unterschiedlichen Bereiche, in denen die Elementspannungen wirken, erklären läßt. Als mögliche Ursache dieses Nebeneffekts kommt dabei das unterschiedliche Verformungsverhalten nach Einsetzen der Schädigung in Betracht.

Als Konsequenz dieser Erkenntnis ergibt sich, daß für eine vollständige Vergleichbarkeit von Proben unterschiedlicher Geometrie die einzelnen Elemente, durch die eine Probe diskretisiert wird, von gleicher Größe sein müssen. Dann stellt sich aber zwangsläufig die Frage, wie die Elementierung taillierter Proben bei veränderlicher Breite über die Probenhöhe sinnvoll gestaltet werden kann, da dann bereits wegen der nicht geraden Probenform Elemente unterschiedlichen Rißdichtenäquivalents entstehen. Modellhafte Vergleiche unterschiedlicher Probengeometrien

lassen sich dann also sinnvollerweise auch nur auf Grundlage der Relation zwischen der Größe der Mikrostrukturelemente und Form und Größe der (Finiten) Modellelemente durchführen.

6.4 Zusammenfassung und Bewertung der FE-Modelle

Bei allen Rechnungen mit den FE-Modellen ergab sich ein negativer Probengrößeneffekt sowohl bezüglich der Bruchspannungen als auch der Schädigungen. Das bedeutet, daß Proben gleicher Grundverteilung der Elementfestigkeiten und gleicher Geometrie niedrigere mittlere Bruchspannungen und -schädigungen mit zunehmender Verfeinerung ihrer Diskretisierung zeigen. Dabei nehmen auch die Streuungen dieser Größen ab. Bei taillierten Proben wird außerdem der mittlere Abstand der Schädigung von der Bruchkante kleiner. Eine Erklärung dieser Effekte ergibt sich dabei aus der Statistik (vgl. Abschnitt 6.3.7).

Bei den Rechnungen mit dem Kontinuumsmodell konnte bei allen Probengeometrien ein *weakest-link*-Skalenverhalten bezüglich der Gesamtanzahl der Elemente gezeigt werden, sofern die Elementzahl eine Mindestzahl von Elementen nicht unterschreitet. Bei einer Serie taillierter Proben war diese Mindestzahl mit 10×50 Elementen deutlich unterschritten (vgl. dazu Kurve B10v4 in Abbildung 10.58). Dieses *weakest-link*-Verhalten zeigt sich sowohl bei der Verteilung der Bruchspannungen als auch der zugehörigen Schädigungen. Für die Kohäsivmodellproben wurde das *weakest-link*-Verhalten nicht untersucht.

Der bereits für das Bündelkettenmodell gezeigte Zusammenhang zwischen der Breite der Grundverteilung der Faserfestigkeiten und der resultierenden Bruchspannung ließ sich für die FE-Modellierung bestätigen, d. h. breitere Grundverteilung der Elementfestigkeiten bei gleichbleibender unterer Generierungsgrenze bedingt höhere Bruchfestigkeiten der Gesamtproben. Daneben wurde außerdem gezeigt, daß breitere Grundverteilungen in taillierten Proben zu breiterer Verteilung der Schädigungen über die Probengeometrie führten, wenn die Probengeometrie selbst dabei unverändert bleibt.

Der Einfluß der Geometrie auf die Bruchspannungen lieferte Ergebnisse, die nicht vollständig konsistent erscheinen. Einerseits konnte bei taillierten Modellproben gezeigt werden, daß Proben mit starker Querschnittsänderung höhere Bruchspannungen und höhere Bruchschädigungen ergeben, als solche mit geringerer Querschnittsänderung. Beim Vergleich mit Proben ohne Querschnittsänderung hingegen ergaben sich für diese Modellproben die höchsten Bruchspannungen und -schädigungen. Als einzig mögliche Ursache wurde dabei die Form der Elemente identifiziert, die für alle drei Probengeometrien unterschiedlich ist.

Der Vergleich der beiden Modellierungsarten, Kohäsivmodell und Kontinuumsmodell, zeigt vergleichbare Ergebnisse beider Modelle, wenn für das Kontinuumsversagen die mittleren Elementspannungen verwendet werden. Das Kohäsivmodell hat allerdings im Rahmen stochastischer FE-Modellierung erhebliche Nachteile gegenüber dem Kontinuumsmodell. Zum einen ist Rißverzweigung in der bislang verwendeten Form des Modells nicht darstellbar. Die Option zur Rißverzweigung würde nur durch Einführung eines zusätzlichen Versagensmechanismus oder aber durch Erweiterung des Kohäsivgesetzes, wie z. B. in [62] gezeigt, möglich werden. Eine Erweiterung des Kohäsivgesetzes benötigt dabei parallel zur Zugrichtung angeordnete Kohäsivelemente, für die dann auch ein anderes Versagenskriterium, z. B. ein Schubkriterium, anstelle des bislang verwendeten Normalspannungskriteriums einzuführen wäre. Weiterhin ist der Einfluß der Separation bei dieser Art der Modellierung störend, da das gesamte Netz den damit verbundenen Deformationen unterworfen ist. Zum dritten erfordert diese Modellierung deutlich mehr Freiheitsgrade bei gleicher Diskretisierung als das Kontinuumsmodell, wodurch erheblich höhere Rechenzeiten erforderlich werden.

Wegen des bei beiden Modellen gelegentlich auftretenden „Delaminierungsverhaltens“ der Modellproben (siehe Abbildung 10.16), kann ein reines Normalspannungskriterium als lokales Versagenskriterium nur eingeschränkte Gültigkeit haben. Als leicht durchführbare Modifikation käme infrage, die Elementhauptspannungen als Versagenskriterium einzuführen oder eine Kombination mit einem Schubspannungskriterium anzuwenden. Dies wurde im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht mehr durchgeführt.

Kapitel 7

Vergleich zwischen Bündel- und FE-Modell

Die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle, die das Versagen auf der Basis diskreter, aus einer Grundverteilungsfunktion generierter Werte für die lokale Bruchfestigkeit beschreiben, eignen sich dafür, numerische Werte der resultierenden Verteilung makroskopischer Festigkeiten analog einer statistischen Stichprobe zu liefern, wenn eine geschlossene Lösung, wie sie für den asymptotischen Fall idealer Bündel gezeigt wurde, nicht verfügbar ist.

Der Vorteil der Fasermodele besteht in ihrer einfachen Struktur und den hohen Rechengeschwindigkeiten, wodurch sie sich ausgezeichnet zur Berechnung großer Mengen von Stichprobenwerten eignen. Ihr Nachteil besteht in der groben Vereinfachung des kontinuumsmechanischen Verhaltens deformierbarer Körper.

Durch Anwendung eines einfachen FE-Codes anstelle der Bündelkette sollte deshalb eine mikromechanisch fundiertere Beschreibung des Kontinuums gefunden werden. Da die Anwendung eines Finite-Elemente-Systems wesentlich kostenintensiver – in Bezug auf Funktionsweise und ihre Sicherstellung und in Bezug auf Rechenzeit – ist, eignet sie sich weniger zur Erzeugung großer Mengen von Ergebnissen, als vielmehr zur Rechtfertigung geeigneter Lastverteilungsregeln des schnelleren Fasermodells.

Nachdem in den beiden vorangegangenen Kapiteln jedes der beiden Modelle für sich dargestellt und untersucht wurde, soll in diesem Kapitel ein Vergleich der Modelle vorgenommen werden. Im anschließenden Kapitel 8 wird dann ein Vergleich der Modelle mit dem experimentell beobachteten Probenverhalten vorgenommen.

Von besonderem Interesse ist beim Vergleich der Modelle die Frage, ob ihre Ergebnisse in statistischer Hinsicht einander entsprechen und wie weit sie voneinander abweichen. Dabei steht also weniger die Antwort beider Modelle in Bezug auf den einzelnen Datensatz generierter Festigkeiten, als vielmehr das statistische Verhalten von Serien nominell gleicher Proben im Mittelpunkt. Da die Bündelkettenmodelle nur auf Proben konstanten Querschnitts angewendet wurden, beschränkt sich der Vergleich auf Proben dieser Art.

7.1 Verhalten der Modellproben bei Belastung

Das unterschiedliche Verhalten von individuellen Modellproben bei Belastung ist in Abbildung 10.70, auf Seite 173, am Beispiel von 4 Modellrechnungen dargestellt. Dabei wurde eine

Modellprobe ohne Querschnittsänderung einmal als Bündelkette mit $N \times M = 21 \times 99$ Fasern, einmal als FE-Modellprobe mit und einmal ohne Kohäsivelemente generiert. Die Bündelkette wurde sowohl mit gleichmäßiger als auch lokaler Lastverteilungsregel berechnet, wobei für die LLS-Regel ein Rißspitzenfaktor von $f_{Rf} = 0.5$ (vgl. Kapitel 4.1.3 ab S. 44) zur Anwendung kam. Die Kohäsiv-Modellprobe wurde mit 20×100 Kontinuums- und 21×99 Kohäsivelementen und die Kontinuumsmodellprobe mit 21×99 Kontinuumsselementen elementiert. In allen 4 Modellrechnungen wurde der gleiche Satz von Versagenswerten einer breiten Grundverteilung ($a = 400$, $c = 5a$, $p = 2$) für die $N \times M = 21 \times 99$ Fasern bzw. bruchfähigen Elemente verwendet.

Der Unterschied der beiden FE-Rechnungen wurde in Kapitel 6.2.3 (Tabelle 6.4: Proben *a* und *b*) bereits eingehend erörtert. Beide FE-Modellproben zeigen eine deutlich geringere Belastbarkeit als die Bündelketten, wobei die LLS-Regel im Bündelkettenmodell deutlich früher zum Probenversagen führt, als die ELS-Regel¹. Beiden Bündelketten-Modellrechnungen gemein und deutlich abweichend vom Verhalten der FE-Proben ist jedoch, daß die Proben beim Erreichen des Kraftmaximums vollständig kaskadenartig versagen, was bei der ELS-Kurve am senkrechten Abfall der Spannung deutlich wird. Bei der LLS-Rechnung bricht die Datenausgabe nach dem letzten gültigen Rechenschritt ab. Dieses abrupte Verhalten ist offenbar auf die Steifheit der Bündelgrenzen zurückzuführen.

Der in Abbildung 10.70 gezeigte Vergleich und Verlauf der Kraft-Schädigungs-Kurven ist typisch und konnte bei allen Verteilungsbreiten und Probengrößen bestätigt werden.

7.2 Probengrößeneffekte

Daß Bruchspannungen und Schädigungen nicht nur für einzelne Proben, sondern auch für eine statistische Gesamtheit nominell gleicher Proben beim Bündelkettenmodell höher sind als bei FE-Rechnungen geht aus den Abbildungen 10.71 und 10.72 hervor. In diesen Abbildungen (siehe Seite 174) sind die Bündelketten-Modellproben der Abbildungen 10.37 und 10.38 mit schmaler Grundverteilung ($c = 2a$, $a = 500$ MPa) und ELS-Regel den FE-Kohäsivmodellproben aus Tabelle 6.1 gegenübergestellt. Dabei wurde jede Probe des Bündelkettenmodells mit den identischen Versagenswerten einer entsprechenden FE-Probe berechnet. Dargestellt sind dabei die Mittelwerte der Bruchspannungen und -schädigungen und ihre Standardabweichungen als Fehlerbalkengraphik in Abhängigkeit von der Systemgröße $N \times M$. Wie der in den Abbildungen gezeigte Vergleich zeigt, liegen die Bruchspannungen und die -schädigungen so weit voneinander entfernt, daß sich selbst die Streubreiten um den Mittelwert nicht überschneiden.

Die in den Abbildungen gezeigte Abhängigkeit der Bruchspannungen und Schädigungen von der Probengröße ist für das FE-Modell im betrachteten Intervall gegenläufig zu der des Bündelkettenmodells mit gleichmäßiger Lastverteilung. Offenbar werden im Gegensatz zu den Ergebnissen des Bündelkettenmodells die Bruchspannungen beim FE-Modell kleiner, wenn die Probengröße zunimmt.

Für diese Bündelketten wurde in Abbildung 10.37 gezeigt, daß der positive Probengrößeneffekt, also die Zunahme der Mittelwerte der Bruchspannungen bei zunehmender Systemgröße $N \times M$, erst ab einer Systemgröße $N \times M \approx 10 \times 50$ gilt; für kleinere $N \times M$ strebt der Mittelwert dem für den Extremfall einer reinen Kette zu, für die die mittlere Bruchspannung wesentlich höher liegt, als bei größeren Bündelketten, so daß ein Umkehreffekt auftritt.

¹Wäre statt des „1-GP-Kriteriums“, vgl. Fußnote auf S. 102, zur Berechnung des FE-Modells mit versagenden Kontinuumsselementen das „GP-MW-Kriterium“ verwendet worden, hätten sich die Ergebnisse der FE-Modelle, Kohäsiv- und Kontinuumsmodell, einander angenähert und damit den Unterschied zwischen den Ergebnissen von FE-Kontinuumsmodell und Bündelkettenmodell mit LLS-Regel abgeschwächt.

Für die FE-Modellrechnungen ist ein solcher Umkehreffekt bei kleineren Systemgrößen $N \times M$, als den hier verwendeten, nicht zu erwarten, da der Extremfall der reinen Kette auch mit dem FE-Modell das selbe Ergebnis wie die analytische Lösung liefern muß. Bei den Bruchschädigungen kann hingegen auch im FE-Modell in diesem Extremfall ein von null abweichender Wert nicht auftreten, so daß bei kleinen Systemgrößen $N \times M$ ein Umkehrpunkt im Probengrößeneffekt der Bruchschädigung für das FE-Modell zwingend ist.

In Abbildung 5.2 (siehe Seite 87) wurde eine ähnliche Fehlerbalkengraphik der auf die untere Generierungsgrenze normierten Bruchspannungsmittelwerte in Abhängigkeit von der logarithmischen Systemgröße, $\log(N \times M)$, für Bündelketten gezeigt, wobei ein Vergleich zwischen gleichmäßiger und lokaler Lastverteilungsregel vorgenommen wurde. Es hatte sich dabei gezeigt, daß bei lokaler Lastverteilungsregel ein Probengrößeneffekt auftritt, bei dem die Bruchspannungen mit zunehmender Probengröße in geringem Maß kleiner werden, ähnlich wie er beim FE-Modell beobachtet wird.

Um den Größeneffekt zwischen dem FE-Modell und dem Bündelkettenmodell bei lokaler Lastverteilung direkt zu vergleichen, wurden Probenreihen ausgewählt, die sowohl mit dem FE-Modell wie auch mit dem Bündelkettenmodell jeweils in zwei Größen $N \times M$ berechnet wurden. Die dabei verwendete Grundverteilung hatte eine relative Generierungsbreite $\zeta=20$ bei der unteren Generierungsgrenze $a=400$ MPa. Der Parameter d betrug 0.5. Die verwendeten Probengrößen waren einmal $N \times M = 20 \times 100$ und einmal 40×200 . Diese wurden sowohl mit dem FE-Kontinuumsmodell, dem FE-Kohäsivmodell und zwei mal mit dem Bündelkettenmodell nominell gleich generiert. Eine der Bündelkettenserien wurde mit lokaler Lastverteilungsregel und eine mit gleichmäßiger Lastverteilungsregel berechnet. Es wurden jeweils Ensembles à 100 Proben berechnet außer von der größeren Kohäsivmodellprobe, von der wegen ihrer ungewöhnlich hohen Rechenzeit (ca. 17 Stunden pro Probe) ein Ensemble von 21 Proben verwendet wird.

In Abbildungen 10.73 und 10.74, Seite 175, sind die Bruchspannungs- und Bruchschädigungsverteilungen dieser Modellrechnungen gezeigt. Auch hier sind deutliche Abstände zwischen den einzelnen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der verschiedenen Modelle sowohl bei den Bruchspannungen als auch bei den Bruchschädigungen zu sehen. Ebenso gibt es kaum Überschneidungen der Streubreiten um die Mittelwerte, wenn man wiederum nur die Kohäsivrechnungen mit den ELS-Rechnungen des Bündelkettenmodells vergleicht.

In diesen beiden Abbildungen lassen sich die beobachteten Größeneffekte auf andere Weise, als in den Fehlerbalkengraphiken, erkennen: Während bei den FE-Rechnungen die Verteilungen der kleineren Proben rechts von ihren größeren Pendanten zu finden sind, kehrt sich dieses Bild bei den ELS-Rechnungen des Bündelkettenmodells um. Anders bei den mit lokaler Lastverteilungsregel berechneten Bündelketten, bei denen die Verteilung der kleineren Proben praktisch mit der Verteilung der großen Proben zusammenfällt, sieht man von den flacher auslaufenden Schwänzen der Rechnungen der kleineren Modellproben ab. Alle 4 Modelle zeigen übereinstimmend steilere Verteilungen bei größerem $N \times M$, was bedeutet, daß deren Standardabweichungen mit zunehmender Probengröße abnehmen. Dies führt dazu, daß die Schnittpunkte der Verteilungen für die großen und kleinen Proben der FE-Modellrechnungen sehr tief liegen, während dieser Schnittpunkt aus dem Bündelkettenmodell mit ELS-Regel sehr hoch liegt. Die Mittelpunkte der Verteilungen entsprechen hierbei in etwa deren Mittelwerten. Während bei den beiden FE-Modellen der Probengrößeneffekt deutlich negativ und beim Bündelkettenmodell mit ELS-Regel positiv ist, scheint dieser beim Bündelkettenmodell mit LLS-Regel nahezu konstant zu bleiben. Auffällig unterscheiden sich die Schwänze der Verteilungen: bei den Bündelmodellrechnungen sind sehr große Unterschiede zwischen den Extrema der Verteilungsschwänze, d. h. Minima und Maxima der erzielten Resultate, zu be-

obachten, die in dieser ausgeprägten Form bei den Verteilungen aus den FE-Rechnungen nicht zu beobachten sind.

Es zeigt sich bei diesem Vergleich, daß die Resultate, die mit dem Bündelkettenmodell mit lokaler Lastverteilungsregel erzielt werden, eine deutliche Tendenz hin zu den Resultaten aus den FE-Rechnungen aufweisen, wenn auch sowohl die Mittelwerte der Bruchspannungen und -schädigungen noch ein deutlich höheres Niveau haben, als auch der Probengrößeneffekt nicht ausgeprägt genug ist, um den aus den FE-Modellrechnungen wiederzuspiegeln.

Die Anwendung einer LLS-Regel beim Bündelkettenmodell führt also sowohl zu deutlich kleineren Mittelwerten der Bruchspannungen und -schädigungen, womit sich diese den Mittelwerten aus den FE-Rechnungen annähern, als auch tendenziell zu einer Umkehrung des beobachteten Probengrößeneffekts. Hierbei liegt die Vermutung nahe, daß durch Wahl eines geeigneten, noch höheren Rißspitzenfaktors f_{Rf} die Ergebnisse der FE-Rechnungen in statistischer Hinsicht durch das Bündelkettenmodell mit LLS-Regel simuliert werden können. Weitergehende Untersuchungen dieser Annahme zeigen aber, daß der dazu benötigte Faktor von Probengröße zu Probengröße und von Grundverteilung zu Grundverteilung erheblich schwankt. (Siehe dazu Abschnitt 7.3.) Eine Ursache davon könnte die Tatsache sein, daß die LLS-Regel zwar einen stärkeren Rißlokalisierungseffekt in einer bereits geschädigten Schicht bewirkt, die einzelnen Schichten, wie bei der ELS-Regel, aber weiterhin voneinander entkoppelt sind, wohingegen durch das FE-Modell, aufgrund der Deformierbarkeit der Schichten, ein zusätzlicher schichtübergreifender Einfluß wirksam wird.

7.2.1 Skalierbarkeiten

Ein wichtiger Unterschied zwischen FE-Modell und Bündelkette ergibt sich hinsichtlich der Skalierbarkeit der Verteilungen von Bruchspannungen und -schädigungen. Bei den Bündelkettenmodellen, ob bei gleichmäßiger oder lokaler Lastverteilungsregel, erwies sich die Anwendung der *weakest-link*-Skalierung hinsichtlich der Gesamtzahl der Fasern im allgemeinen als nicht durchführbar. Dagegen ließen sich Bündel gleicher Breite, d. h. Faseranzahl, trivialerweise mittels der *weakest-link*-Transformation hinsichtlich der Kettenlänge skalieren.

Bei den FE-Modellen hingegen ließen sich die Verteilungen der Bruchspannungen und -schädigungen einer Systemgröße $N \times M$ auf die Verteilungen einer anderen Systemgröße abbilden, indem die *weakest-link*-Skalierung bezüglich der Gesamtanzahl der Elemente angewendet wurde.

7.3 Anpassung des Lastkonzentrationsfaktors des Bündelkettenmodells an FE-Ergebnisse

Eines der zu Beginn dieser Arbeit formulierten Ziele war ein Vergleich des Systemverhaltens unter realistischer Lastverteilung mit experimentellen Beobachtungen. Die Ergebnisse realitätsnaher Lastverteilung sollten dabei mittels der FE-Modellierung ermittelt werden, während ein Ansatz zur Überwindung der Systemgrößenbeschränkung darin besteht, im Rahmen des Bündelkettenmodells mit lokaler Lastverteilungsregel den Lastkonzentrationsfaktor für Faserbelastungen vor Rißspitzen dahingehend anzupassen, daß die makroskopischen Antworten des Bündelkettenmodells denen des FE-Modells gleichwertig sind, also gleiche Bruchspannungen, -schädigungen und zugehörige Streuungen liefern.

7.3.1 Anpassung für individuelle Proben

Um eine Lastverteilungsregel für das Bündelkettenmodell zu erhalten, mit der die Ergebnisse der FE-Modellierung wiedergegeben werden können, wurden zuerst einzelne, nominell gleiche Modellproben mit dem FE-Modell berechnet, und anschließend wurde jede dieser Modellproben, also identische Versagensgrenzwerte, mit dem Bündelkettenmodell und der *local load sharing*-Regel, Gl. (4.39), mit jeweils nach und nach gesteigertem Rißspitzenlastfaktor, f_{Rf} , berechnet. Hierdurch wurde für jede Probe ein Faktor für die Rißspitzenfaser-Mehrbelastung ermittelt, durch den die Bruchspannungen des FE-Ergebnisses annähernd gut mit dem Bündelkettenmodell wiedergegeben werden konnten. Ein Vergleich der für die einzelnen Modellproben angepaßten Rißspitzenfaktoren ergab sehr weit differierende Werte (etwa zwischen 0.6 und 1.9), so daß es nicht möglich war, dem FE-Modell vergleichbares Verhalten des Bündelkettenmodells durch die Anpassung bei individuellen Proben zu erreichen. Als Grund für die große Schwankung der erforderlichen Rißspitzenfaktoren läßt sich die grundsätzlich unterschiedliche Reaktion von FE-Modell und Bündelkette auf schwache Gefügestellen anführen: Während sich eine stärkere Belastung von Fasern an den lokalen Rißspitzen nach Bruch einer weiteren Faser beim Bündelkettenmodell vor allem dadurch auswirkt, daß Fasern in der gleichen Schicht bevorzugt brechen, Fasern in anderen Schichten aber gleichzeitig aufgrund der reduzierten Bündelkraft weniger belastet werden, erfolgt beim FE-Modell bei Bruch einzelner Elemente aufgrund der Deformation der Schichten auch eine Höherbelastung von Elementen über und unter den stärker belasteten Rißspitzen, so daß diese, wenn sie schwach sind, ebenfalls bevorzugt brechen. Die großen Unterschiede in den für vergleichbare Resultate erforderlichen Lastkonzentrationsfaktoren resultieren daher offensichtlich aus für jede individuelle Probe zufälliger Verteilung der Schwachstellen. Wegen dieses fundamentalen Unterschieds im Verhalten der Modelle erscheint es auch nicht sinnvoll, auf der Basis schichtintern formulierter Lastumverteilungsregeln die bisher verwendeten, phänomenologisch gewählten Spannungsverteilungen auf die Nachbarfasern zu modifizieren, und es erscheint sinnvoller, den Spannungsverlauf des Kontinuums auch schichtübergreifend in eine „Regel“ zu fassen. Dieser Versuch wurde im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit jedoch nicht mehr unternommen.

7.3.2 Anpassung für kollektive Probenantworten

Eine lokale Lastverteilungsregel für das Bündelkettenmodell, mit der das Verhalten individueller Proben ihrem Verhalten bei Verwendung des FE-Modells angenähert wird, ließ sich wie oben gezeigt nicht finden. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß sich möglicherweise ein Lastfaktor bestimmen läßt, mit dem die kollektive Bündelketten-Antwort einer Serie nominell gleicher Modellproben ihrer kollektiven FE-Antwort entspricht.

Um dies zu überprüfen, wurden Probenserien generiert, die die gleiche Grundverteilung besitzen, wie Proben einer bereits mit dem FE-Modell berechneten Serie von Proben. Die Probenserie der FE-Modellrechnungen G20v4 (vgl. Tabelle 6.2 auf Seite 99) umfaßt 100 nominell gleiche Proben einer breiten Grundverteilung ($a=400$ MPa, $\zeta=20$); ihre makroskopischen Antworten wurden bereits in den Abbildungen 10.45 und 10.46 dargestellt (hellblaue Punkte). Es wurden nun jeweils 100 Proben der gleichen Grundverteilung generiert und mit dem Bündelkettenmodell berechnet, wobei der Lastfaktor f_{Rf} der Rißspitzenfasermehrbelastung jeweils um 0.1 erhöht wurde und die Verteilung der resultierenden Bruchspannungen bestimmt wurde. Auf diese Weise ließen sich die beiden Faktoren $f_{Rf}=1.2$ und 1.3 ermitteln, mit denen die Verteilungen der Bruchspannungen ungefähr mit der Bruchspannungsverteilung der FE-Modellproben übereinstimmte. Diese Bruchspannungsverteilungen sind in Abbildung 10.75 (Seite 176) dargestellt. Es zeigt sich dabei, daß die Verteilung der Bruchspannungen der

FE-Modellproben in etwa zwischen den beiden Verteilungen der Bündelkettenproben liegt. Die Verteilung der Bruchschädigungen der entsprechenden Ensembles von Bündelkettenproben gruppieren sich dabei in ähnlicher Weise um die der FE-Modellproben, siehe Abbildung 10.76. In Tabelle 7.1 sind diese Ergebnisse summarisch wiedergegeben.

Tabelle 7.1: Bruchspannungen und -schädigungen bei 2 Verteilungsbreiten mit dem FE-Kontinuumsmodell und dem Bündelkettenmodell mit an die FE-Ergebnisse bei einer Verteilungsbreite ($\zeta=20$) angepaßtem Lastkonzentrationsfaktor f_{Rf}

Verteilung der Elementbruchspannungen: $P(\sigma_c) = \left(\frac{\sigma_c - a}{c}\right)^p$ [MPa]

Parameter für das Beispiel: $a=400$, $c=\zeta a$, $d=0.5$; $p=1/d$

Systemgröße $N \times M = 20 \times 100$ Kontinuums-elemente ($l_x = 0.1$ mm, $E=180$ GPa)
bzw. Fasern ($A_f = 1$); jeweils 100 nominell gleiche Proben

Verteilungsbreite ζ		20			5		
Modell		FE	BK		FE	BK	
f_{Rf}		—	1.2	1.3	—	1.2	1.3
Bruchspannung	min	1271	1362	1294	487	447	455
	$F/(Nl_x)$	1883	1823	1854	649	627	637
	bzw. MW	1573	1617	1569	572	548	545
$F/(NA_f)$	SA	143	121	117	39	35	34
	min	1.20	1.55	1.15	0.30	0.05	0.05
	max	4.90	4.65	4.20	2.10	2.15	2.10
Schädigung [%]	MW	2.93	3.03	2.79	1.06	0.81	0.73
	SA	0.78	0.72	0.65	0.45	0.40	0.36
	$100N_b/(NM)$						

Es zeigt sich aber dabei, daß die Streuungen der Bündelkettenmodellrechnungen deutlich geringer sind als die der FE-Modellrechnungen, was in der graphischen Darstellung durch den steileren Verlauf der Verteilungen zum Ausdruck kommt. Dies gilt sowohl für den höheren Lastkonzentrationsfaktor wie für den niedrigeren und gleichermaßen bei den Bruchspannungen wie den Bruchschädigungen.

Verwendet man die ermittelten Lastfaktoren für die nächstfeiner elementierte und dokumentierte Probengröße von $N \times M = 40 \times 200$ Elementen, liegen die Verteilungen der FE-Rechnungen zwar immer noch zwischen den Verteilungen, die mit dem Bündelkettenmodell mit den beiden Lastkonzentrationsfaktoren erzielt werden (nicht dargestellt), aber die Fehler in den Streuungen bleiben beim Bündelkettenmodell bestehen und die Form der resultierenden Verteilungen weist beim feiner elementierten Bündelkettenmodell noch größere Unterschiede auf, also steileres Mittelfeld und ausgeprägtere Schwänze beim Bündelkettenmodell.

Überträgt man schließlich auch noch die gleichen lokalen Rißspitzenüberhöhungsfaktoren auf Modellproben einer anderen Grundverteilung, wird deutlich, daß dieser Parameter nicht übertragbar ist. In den Abbildungen 10.75 und 10.76 sind auf der linken Seite die mit dem FE-Modell berechneten Verteilungen der Proben G20v1 einer schmalen Grundverteilung ($a=400$, $\zeta=5$) dargestellt (grüne Punkte) und die mit dem Bündelkettenmodell erzielten Verteilungen bei Rißspitzenlastfaktoren 1.2 und 1.3. Wie zu erkennen ist, liegt die Verteilung der FE-Modellproben nun nicht mehr zwischen den Verteilungen des Bündelkettenmodells, sondern deutlich daneben. Außerdem sind die Streuungen bei den Bündelkettenproben wieder deutlich geringer, als bei den FE-Rechnungen (siehe auch Tabelle 7.1).

Kapitel 8

Vergleich von FE-Modell und Experimenten

Modellrechnungen mit dem Bündelkettenmodell können wegen der Rechengeschwindigkeit und Speichersparsamkeit des Modells direkt mit der benötigten Anzahl von Faserfestigkeiten durchgeführt werden und bedürfen daher keiner Probengrößenskalierungen. Vergleiche zwischen Modellergebnissen des Bündelkettenmodells und experimentell ermittelten Bruchspannungsmittelwerten, deren Streuungen und Mikrorißdichten finden sich bereits bei Wiesand-Valk in [83]. Zusammenfassend lassen sich diese Vergleiche dadurch charakterisieren, daß einfache Grundverteilungsvorschriften, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden, im allgemeinen nicht ausreichen, um die Ergebnisse für das Bündelkettenmodell mit den experimentell gewonnenen in Übereinstimmung zu bringen. Daneben lassen sich negative Probengrößeneffekte nur durch Verwendung einer *local-load-sharing*-Regel erzielen, was in Übereinstimmung mit den in Kapitel 5.3.2 dieser Arbeit gemachten Feststellungen steht.

In diesem Kapitel werden Modellierungsergebnisse der FE-Rechnungen mit experimentellen Beobachtungen verglichen. Wegen der großen, relativ regelmäßigen Kornstruktur eignet sich der im Blockguß hergestellte Werkstoff „ γ -TiAl“, für den die experimentellen Beobachtungen in Kapitel 2.1 zusammengefaßt sind, besonders gut für den Vergleich mit den FE-Modellen, da die Skalenunterschiede dabei wesentlich geringer sind, als bei den anderen, in Kapitel 2.2 gezeigten, Titanaluminiden. Experimentelle Untersuchungen zum Probengrößeneinfluß sind für diesen Werkstoff allerdings nicht verfügbar.

8.1 Bruchspannungen

Wegen der in Kapitel 6.3.4 festgestellten Abhängigkeit berechneter Bruchspannungen von der Elementierungseinheit des Netzes ist ein Vergleich der Bruchspannungen aus den Finite-Elemente-Rechnungen für Modellproben mit den im Experiment gemessenen nicht unmittelbar möglich, da die Modellproben nicht mit der Elementgröße elementiert wurden, die aufgrund der Korngröße des Probenmaterials zu einem Vergleich erforderlich wäre. Um dennoch Vergleichbarkeit zu erreichen, soll die *weakest-link*-Skalierung verwendet werden, um die Bruchspannungsverteilung der Modellproben so zu skalieren, wie sie mit einer der Korngröße der realen Proben entsprechenden Elementierung erzielt würde.

Geht man bei dem Werkstoff aus Kapitel 2.1 von einer durchschnittlichen Korngröße von $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$ aus, müßten zur FE-Diskretisierung (siehe Kapitel 6.3.1) einer taillierten Probe

(Abbildung 2.1) 100×500 Elemente, d. h. 50 000 Elemente, verwendet werden. Werden die in Abbildung 10.56 gezeigten Bruchspannungsverteilungen der Proben S20v1 und S20v2 aus Tabelle 6.5 mittels der *weakest-link*-Vorschrift Gl. (4.25),

$$1 - P_{25 \times 2000} = (1 - P_{2000})^{25} \quad \Leftrightarrow \quad P_{50000} = 1 - (1 - P_{2000})^{25}, \quad (8.1)$$

von den zur Simulation verwendeten 2 000 auf die zur Modellierung des Probenmaterials notwendigen 50 000 Elemente skaliert, lassen sich diese Verteilungen mit den gemessenen Bruchspannungen der experimentell untersuchten taillierten Mikroflachzugproben vergleichen.

Abbildung 10.77, auf Seite 177, zeigt die Bruchspannungsverteilung, die sich aus den 7 Bruchspannungswerten aus Tabelle 2.2 ergibt, als dicke rote Punkte. Daneben sind die Bruchspannungsverteilungen der je 100 FE-Modellproben S20v1 und S20v2 und deren auf die Probengröße 100×500 Elemente hochskalierten Bruchspannungsverteilungen gezeigt. Dabei wird deutlich, daß die Verteilung der Proben mit breiterer Streuung der Versagensgrenzwerte, $\zeta=10$, zu hohe Bruchspannungswerte im Vergleich zu den an den realen Proben gemessenen Werten liefert. Bei den Modellproben, deren Versagenswerte mit der schmaleren Grundverteilung, $\zeta=5$, erzeugt wurden, liegen die berechneten Werte über, die durch Skalierung gefundenen hingegen unter den gemessenen Bruchspannungen. Angesichts des kleinen experimentellen Datensatzes erscheint die Übereinstimmung jedoch als ausreichend, für die richtige Grundverteilung anzunehmen, daß ζ nahe bei 5 liegt.

Es kann also festgestellt werden, daß mit dem verwendeten FE-Modell, d. h. bruchfähige Kontinuums-elemente mit „1-GP-Kriterium“ (siehe Fußnote auf Seite 103) für das Versagen, eine Grundverteilungsbreite $\zeta \approx 5$ bei einer unteren Versagensgrenze der Elementfestigkeiten $a=400$ MPa zur Wiedergabe der experimentellen Ergebnisse realistisch erscheint. Würde statt des 1-GP-Kriteriums ein Elementversagenskriterium verwendet werden, welches zu höheren Bruchspannungen führt, wie z. B. das „GP-MW-Kriterium“, wäre ein etwas geringerer Wert für die Breite der Grundverteilung zur Reproduktion der experimentell ermittelten Probenbruchspannungen zu wählen. Zum Vergleich dazu sei hier bemerkt, daß Wiesand-Valk in [83] bei gleicher Generierungsvorschrift für die Faserfestigkeiten mit einem modifizierten Bündelkettenmodell, bei dem die Verjüngung der Probengeometrie durch eine variable Anzahl von Bündelstäben und die Lastumverteilung nach dem Versagen einer Faser durch Lastgleichverteilung (*equal load sharing*) berücksichtigt werden, als beste Anpassung der Probenbruchspannung an die selben experimentell ermittelten Bruchspannungen den Wert $\zeta=2$ angibt (auch $a=400$ MPa und $p=2$ bzw. $d=0.5$).

8.2 Schädigungen

In Tabelle 2.1, in Kapitel 2.1.4, wurden Rißdichten, die an taillierten Probenhälften nach dem Bruch gemessen wurden, in mm/mm^2 angegeben. Um aus diesen Werten Größen zu bestimmen, die mit Ergebnissen des FE-Modells vergleichbar sind, wird wiederum eine mittlere Korngröße von $20 \mu m \times 20 \mu m$ beim Probenmaterial angenommen. Bei dieser Größe besteht $1 mm^2$ des Werkstoffs aus 50 Kornschichten, deren Grenzen eine Länge von jeweils $1 mm$ senkrecht zur Belastungsrichtung besitzen, so daß im Flächenbereich von $1 mm^2$ eine maximale Gesamtrißlänge von $50 mm$ möglich wäre. Eine gemessene Rißdichte von $1.65 mm/mm^2$ entspricht also einer Schädigung von $100 \cdot 1.65/50=3.3\%$. Verwendet man diese Umrechnung der Mikrorißdichten in Schädigungsanteile, ergeben sich Schädigungen im Abstand von der Bruchkante, deren graphische Darstellung denen der Abbildungen 10.1 und 10.2, auf Seite 136, entsprechen, wenn man verdoppelte Werte auf der Ordinatenachse mit „Mikrorißanteil [%]“ bezeichnet.

Die gemessenen Schädigungen sollen nun mit den Schädigungen der Modellprobenserie S20v1 verglichen werden, da diese Serie die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen bei der Bruchspannungsverteilung gezeigt hat. Hierzu werden zunächst die Abstände der Schwerpunkte der gemessenen und berechneten Schädigungen von der Bruchkante, d. h. der taillierten Probenmitte, bestimmt und miteinander verglichen. Weiterhin werden die Schädigungsanteile selbst als Funktion des Abstandes miteinander verglichen.

Die Abstände von der Bruchkante des Schwerpunkts der Rißdichte sind für die Modellproben bereits in Kapitel 6.3.5 über Gl. (6.8) definiert und in Abbildung 10.64 als „mittlere Abstände“ für jede einzelne Probe dargestellt worden. Der mittlere Abstand des Schwerpunkts der Rißdichte für die Modellprobenserie S20v1 ergibt sich durch Mittelung der einzelnen Schwerpunktabstände jeder der 100 Proben zu etwa 1.1 mm . Die Standardabweichung der Streuung der einzelnen Schwerpunktabstände um diesen Mittelwert beträgt 0.65 mm , ist also ziemlich groß.

Der mittlere Abstand des Schwerpunkts der Rißdichte für die Probenserie S20v1 ist zusammen mit den mittleren Abständen für die größeren Proben mit gleicher Grundverteilung, S30v1 und S40v1, in Abhängigkeit von der logarithmischen Probengröße in Abbildung 10.78 als Fehlerbalkengraphik auftragen. Es zeigt sich dabei, daß sich die Streuung für die einzelnen Probengrößen praktisch nicht ändert, während sich die 3 errechneten Mittelwerte in der logarithmischen Darstellung recht gut durch eine Gerade verbinden lassen. Verlängert man diese Gerade bis zu der Größe, mit der die realen Proben modelliert werden müßten, also $\log(100 \times 500)$, erhält man einen mittleren Abstand für den Schwerpunkt der Rißdichte, der die Modellergebnisse auf die reale Probengröße skaliert. Dieser durch Extrapolation gewonnene mittlere Schwerpunktabstand beträgt etwa 0.8 mm .

Der mittlere Abstand des Schwerpunkts der gemessenen Rißdichten aus Tabelle 2.1 wird auf zwei Arten ermittelt. Zum einen wird dieser Abstand mit den diskret gemessenen Werten bestimmt, zum anderen über die Mittelwertfunktion dieser Werte.

Die Gesamtrißlänge im Abstand y von der Bruchkante beträgt wegen der variablen Probenbreite $\alpha(y)B(y)\text{ mm}$ in einem 1 mm breiten Streifen, wenn $\alpha(y)$ die Rißdichte und $B(y)$ die Probenbreite im Abstand y sind. Der Schwerpunktabstand aller Risse berechnet sich damit für die diskret ermittelten Mikrorisse durch

$$\bar{y} = \frac{\sum \alpha(y)B(y)y}{\sum \alpha(y)B(y)}, \quad (8.2)$$

und bei Verwendung der Mittelwertfunktion, die in Abbildung 10.2 als dicke schwarze Linie dargestellt ist, durch

$$\bar{y} = \frac{\int \alpha(y)B(y)y\,dy}{\int \alpha(y)B(y)\,dy}. \quad (8.3)$$

Die Funktion $\alpha(y)$ ist in diesem Fall die abschnittsweise lineare Funktion, die durch die mit dicken Punkten in Abbildung 10.2 dargestellten Mittelwerte bestimmt ist. Der Unterschied der Ergebnisse dieser beiden Berechnungen ist gering; er beträgt bei der ersten Berechnungsweise 0.74 und bei der zweiten 0.73 mm .

In Abbildung 10.79 sind die Schwerpunktabstände der gemessenen und der sich aus den Modellproben ergebenden Mikrorisse von der Bruchkante als senkrechte Linien dargestellt. Wie sich zeigt, ist dieser Abstand für die Modellproben zwar etwas größer als der gemessene, dennoch ist die Übereinstimmung der beiden Werte überraschend gut.

Um eine detailliertere Darstellung der Schädigungen der Modellproben im Vergleich zu den gemessenen Mikrorißdichten entsprechenden Schädigungen zu erhalten, wurden die bei Kraftmaximum zerstörten Elemente der Modellrechnungen berücksichtigt. Für jedes zerstörte Element wurde die Elementfläche und der Betrag des Abstands des Elementmittelpunkts von der taillierten Probenmitte bestimmt. Außerdem wurde die Modellprobenfläche jeder Elementschicht bestimmt. Für die 100 Proben der Serie S20v1 wurde mit diesen Werten der prozentuale Schädigungsanteil für jede Elementschicht dadurch bestimmt, daß die Summe der gebrochenen Elementflächen jeder Schicht durch die (doppelte) Fläche der Gesamtschicht dividiert wurde. (Doppelt wegen des Betrags, womit 200 Probenhälften repräsentiert werden.) Diese Schädigungsanteile wurden als Wertetabelle zusammen mit den Abständen dieser Schichten ausgegeben und in Abbildung 10.80 geplottet. Nach dem gleichen Verfahren wurden die Schädigungsanteile der 100 Proben mit nächstfeiner Elementierung, S30v1, in der gleichen Abbildung dargestellt.

In der Tendenz zeigen beide Modellprobenensembles einen auf konstantem Niveau streuenden Mikrorißanteil bis zu einem Abstand von 0.75 mm . Dann nimmt der Anteil der Mikrorisse kontinuierlich ab, bis er bei einem Abstand von etwa 3 mm praktisch null erreicht hat. Die Schwankungen der feiner elementierten Proben sind dabei deutlich geringer als die der gröber elementierten Proben. Eine Skalierung analog der für den Schwerpunktabstand wurde hierbei nicht vorgenommen, aber es ist leicht zu erkennen, daß diese Mikrorißanteile zwischen null und der roten Kurve lägen, wobei sich die Schwankungen bei punktwiser Skalierung deutlich vergrößern würden.

Betrachtet man den Verlauf der Mittelwertfunktion der Experimente, ist der Verlauf recht ähnlich: Im Bereich bis 0.7 mm zeigt sich trotz großer Schwankungen der Mikrorißdichten der einzelnen Probenhälften ein annähernd konstanter Verlauf, der dann kontinuierlich auf null abfällt.

Die Kurve der Mittelwerte der gemessenen Rißdichten liegt allerdings deutlich über denen der Modellproben und erreicht auch etwas früher, bei ca 2.3 mm , den Wert null. Berücksichtigt man jedoch die großen Schwankungen der gemessenen Mikrorißdichten von Probe zu Probe und darüberhinaus die Tatsache, daß der Mittelwert dieser Dichten aus den Werten von nur 4 Probenhälften gewonnen wird, wohingegen die simulatorisch erzielten Mittelwerte für Ensembles von 200 Modellprobenhälften berechnet wurden, so erscheinen diese Unterschiede statistisch möglich.

Weiterhin auffallend bei den Mikrorißdichten der beiden unterschiedlich fein elementierten Modellprobenserien ist, daß sich die Mikrorißdichten mit zunehmender Elementierungsverfeinerung gegen eine untere, glattere Hüllkurve zuzubewegen scheinen, anstatt in ihrem Gesamtniveau abzufallen. Bei den feiner elementierten Modellproben wird dabei, bedingt durch die höhere Elementanzahl in einem 1-Element-hohen Streifen (0.067 mm) über die Probenbreite, eine größere Datenmenge zur Mittelung herangezogen. Die dadurch glattere Kurve der Mittelungen sinkt dabei offensichtlich infolge des Größeneffekts gerade soweit ab, daß sie asymptotisch gegen diese untere Hüllkurve tendiert. Bei den gemessenen Rißdichten wurden die Rißdichten an ca. 0.06 mm breiten Streifen gemessen, ohne dabei die Anzahl der beteiligten Körner zu berücksichtigen, die aufgrund der Schwankung der Korngrößen sehr unterschiedlich ausfallen kann. Dieser Einfluß könnte ein Grund für die starke Streuung der gemessenen Werte sein. Bemerkenswert ist jedenfalls, daß sich die untere Hüllkurve der an den 4 Probenhälften gemessenen Werte auf dem selben Niveau befindet, das auch die untere Hüllkurve der Simulation zeigt.

In jedem Fall wird der Trend der Messungen in Abhängigkeit vom Abstand von der Bruchkante durch die Berechnungen gut wiedergegeben.

Kapitel 9

Bewertung und Ausblick

Ausgehend von einem lokalen Ansatz, bei dem das Gefüge eines quasi-spröden Werkstoffs durch Elemente von der Größe der das makroskopische Materialverhalten bestimmenden Körner diskretisiert wird, wurde das makroskopische Verhalten einachsig bis zum Bruch belasteter Flachzugproben simuliert. Hierbei wurden die Fluktuationen der Korneigenschaften, d. h. ihrer Größe, Orientierung und mechanischen Eigenschaften, in idealisierender Weise durch eine statistische Verteilung ihrer Versagensnormalspannungen beschrieben und die einzelnen Körner als in sich isotrope homogene kleinste Materialeinheiten angesehen. Zur Simulation wurden verschiedene ebene Modelle verwendet, die alle lokal elastisch-ideal-sprödes Materialverhalten simulieren, sich aber in Hinsicht auf die Umverteilung der bei Elementbruch freiwerdenden Energie unterscheiden. Der Hauptunterschied der Modelle besteht physikalisch in den kinematischen Annahmen, mit denen die Gleichgewichtszustände berechnet werden. Bei den Fasernmodellen ist die Kinematik durch ebenbleibende Querschnitte bestimmt, wodurch die Bestimmungsgleichungen bei der ELS-Regel nur einachsige Spannungs-Dehnungsbeziehungen erfüllen müssen. Bei der LLS-Regel werden schließlich die Spannungen der Einzelfasern ohne direkte Dehnungsrelation nach phänomenologisch gewählten Kriterien aus den Bündelspannungen berechnet. Die Kinematik der FE-Modelle hingegen basiert auf der deformierbarer Körper, wobei für jeden Materiepunkt (bei dem hier verwendeten ebenen Modell) zweiachsige Spannungs-Dehnungsbeziehungen zu erfüllen sind. Mathematisch unterscheiden sich die Modelle dadurch, daß die Fasernmodelle aufgrund der formalen Regelung, mit der die lokale Lastverteilung bestimmt wird, ohne die Lösung gekoppelter Gleichungssysteme auskommen und dadurch eine numerische Lösung bedeutend schneller erreicht wird, während die FE-Modelle aufgrund der Mehrachsigkeit der Spannungs-Dehnungsbeziehungen zu gekoppelten Gleichungssystemen für alle Freiheitsgrade der Probe führen, und dadurch mit einem vergleichsweise hohen Rechenaufwand verbunden sind. Ein Teil der vorliegenden Arbeit besteht in der Darstellung dieser Modelle und der angewendeten Verfahren zur numerischen Berechnung der Probenantworten.

Untersucht wurden die makroskopischen Probenantworten in Abhängigkeit von verschiedenen Grundverteilungen für die Korngrenzfestigkeiten, wobei sich die Grundverteilungen in erster Linie durch ihre Verteilungsbreiten unterschieden. Bei den makroskopischen Probenantworten, also den Bruchspannungen und -schädigungen, wurde vornehmlich das kollektive Verhalten von nominell gleichen Modellproben betrachtet, also die kumulative Verteilung dieser Werte und deren Streuungen. An taillierten Proben wurde außerdem die räumliche Verteilung der Schädigung bei Probenbruch untersucht. Der Probenbruch wurde dabei als der Zeitpunkt definiert, in dem eine Probe ihre maximale Belastung erreicht hat. Das individuelle Verhalten einzelner Proben wurde untersucht, wenn ungeklärte die Einzelproben betreffen-

de Sachverhalte dies erforderten. Dies betraf einerseits die Programmsteuerung oder andere implementatorische Details und andererseits den Vergleich zwischen dem Verhalten einzelner Proben, die nacheinander mit verschiedenen Modellannahmen berechnet worden waren. Dabei erwies sich das Individualverhalten einzelner Proben als teilweise chaotisch, d. h. bei nur geringen Änderungen von Modellparametern, wie beispielsweise der Separationssteifigkeit, ψ , des FE-Kohäsivmodells oder des Rißspitzen-Lastkonzentrationsfaktors, f_{Rf} , des Bündelkettenmodells können die makroskopischen Probenantworten einer im übrigen unveränderten Probe stark voneinander abweichen, während die kollektiven Antworten von Probenensembles weit weniger von solchen Änderungen betroffen sind.

Innerhalb der Systematik der Untersuchungen wurden neben der Breite der Grundverteilungen auch die Systemgröße und bei den taillierten Proben die Geometrie, charakterisiert durch das Verhältnis von breiter zu schmaler Stelle der Probe, κ , variiert. Bei den Fasernmodellen wurden die Bündelbreiten einfacher Bündel und die Länge von Bündelketten variiert und die Verteilung der Modellantworten in Abhängigkeit von diesen Parametern untersucht. Zudem wurden für die Bündelkettenmodelle die Auswirkungen einer „lokalen Lastverteilungsregel“ auf das Probenverhalten analysiert. Bei den FE-Modellen wurden zwei verschiedene Versagensansätze benutzt und deren Auswirkungen auf die Probenantworten untersucht. Die Ergebnisse der verschiedenen Modelle wurden untereinander verglichen. Schließlich wurde ein Vergleich taillierter Modellproben mit experimentell beobachteten Vergleichswerten durchgeführt.

Das Ziel dieser Arbeit war die Bewertung einfacher statistischer Verfahren zur Bestimmung der makroskopischen Probenantworten bei einachsiger Zugbelastung unter Verwendung eines statistischen lokalen Ansatzes für die Gefügeeigenschaften. Ein Kriterium für die Bewertung der Verfahren ist die Übereinstimmung mit experimentell ermittelbaren Probenantworten. Meßbare individuelle Probenantworten sind die Probenbruchspannung und die Anzahl, Größe und lokale Verteilung der Mikrorisse. Die kollektiven Antworten sind durch die statistischen Verteilungen dieser Größen für ein Ensemble nominell gleicher Proben bestimmt. Hierzu zählen in erster Linie der Mittelwert und die Streuung der Bruchspannung und der Anzahl der Mikrorisse. Eine weitere experimentell zugängliche Größe ist die Veränderung der Probenantworten bei Änderung der Probenabmessungen unter Beibehaltung der geometrischen Proportionen und ausschließlicher Veränderung der Probengröße, also der Probengrößeneffekt.

Wie sich aus den in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen ergibt, haben beide Berechnungsmodelle, das Bündelkettenmodell wie das FE-Modell, Vor- und Nachteile. Ein Vorteil der Fasernmodelle besteht in ihrer hohen Rechengeschwindigkeit, und der Möglichkeit besonders feiner Elementierung. Ein Nachteil besteht darin, daß die mikromechanische Lastumverteilung nach lokalem Versagen explizit mittels einer Regel vorgegeben werden muß. Ob sich eine Regel finden läßt, die das mikromechanische Verhalten hinreichend gut beschreibt, konnte in dieser Arbeit nicht abschließend beantwortet werden, zumindest muß eine solche aber ein lokales Lastverteilungskriterium besitzen. Es zeigte sich aber, daß sich im Rahmen des klassischen Bündelkettenmodells, bei dem sich die *local load sharing*-Regel auf Lastverteilungsvorschriften innerhalb einer Faserschicht beschränkt, eine Regel finden läßt, die das kollektive Verhalten von Bruchspannung und -schädigung in annähernder Übereinstimmung mit FE-Ergebnissen bei gleicher Grundverteilung der lokalen Bruchfestigkeiten wiedergibt. Eine so gefundene Lastverteilungsregel ist jedoch nicht universell, d. h. nicht übertragbar auf Werkstoffe mit anderer Grundverteilung der lokalen Bruchfestigkeiten.

Eine genauere Untersuchung der Fasernmodelle ergab außerdem, daß die Verwendung asymptotischer Lösungen für die Bündelantworten bei begrenzten Bündelgrößen zu nicht vernach-

lässigbaren Abweichungen bei den Bruchspannungen, ihren Streuungen und den Bruchschädigungen führt. Die Streuungen der Bruchschädigungen werden durch sie nicht beschrieben. Was die Skalierungseigenschaften des Bündelkettenmodells angeht, lassen sich die Bündelkettenergebnisse mittels einer *weakest-link*-Vorschrift in Bezug auf die Kettenlänge skalieren, wenn als Bezugsgröße Bündelketten verwendet werden, die eine gewisse Mindestlänge aufweisen. Eine *weakest-link*-Skalierung bezüglich der Gesamtzahl der Fasern beschreibt jedoch das statistische Verhalten dieses Modells nicht richtig.

Eine FE-Modellierung des Probenverhaltens ist vor allem mit zwei Problemen verknüpft. Das eine besteht in dem großen Rechenaufwand zur Bestimmung der Probenantwort, das zweite in der Beschränkung der Systemgröße, die wiederum nach Implementierung eines iterativen Gleichungslösers ohne Matrixinvertierung in erster Linie durch die Rechenzeiten bestimmt ist und erst in zweiter Linie durch den erforderlichen Speicherplatz. Der wichtigste Vorteil der FE-Modellierung besteht in der Berücksichtigung einer mechanisch bestimmten Lastumlagerung bei Elementversagen.

Eine Modellierung des lokalen Versagens mittels Kohäsivelementen führt dabei, unabhängig von der Art der Kohäsivelemente, zu einer ungefähren Verdoppelung der Freiheitsgrade, was in Anbetracht der ohnehin kritischen Rechenzeit nicht für diese Art der Versagensmodellierung im Zusammenhang mit lokalen Ansätzen spricht. Darüberhinaus zeigte sich, daß die Kohäsivenergie weitere Modellparameter enthält, die zusätzlich zur lokalen Verteilung der Versagensgrenzwerte iterativ aus einem Vergleich mit den experimentell bestimmten makroskopischen kollektiven Probenverhalten zu bestimmen sind.

Die Modellierung des Versagens durch Integration in die Kontinuums-elemente bietet darüberhinaus die Möglichkeit, auf einfache Art Rißablenkung und -verzweigung zu modellieren. Nichtkonstante Spannungsverläufe innerhalb von Elementen führen dabei zur Frage nach einem geeigneten lokalen Versagenskriterium. Es zeigte sich, daß das Versagenskriterium bezüglich der mittleren Elementspannung („GP-MW-Kriterium“) makroskopische Probenantworten liefert, die recht gut mit der in dieser Arbeit verwendeten knotenorientierten Kohäsivmodellierung zu vergleichen sind, und somit auch am besten dazu geeignet ist, die Ergebnisse des Bündelkettenmodells mit Ergebnissen des FE-Modells zu vergleichen. Wegen der damit verbundenen längeren Rechenzeit und der prinzipiell willkürlichen Wahl des Kriteriums wurde im Rahmen dieser Arbeit aber mehrheitlich ein Elementversagenskriterium verwendet, bei dem ein Element bereits dann bricht, wenn an *einem* Integrationspunkt die Elementgrenzspannung erreicht wurde („1-GP-Kriterium“). Die erzielten makroskopischen Probenantworten werden dabei insgesamt kleiner, als beim „GP-MW-Kriterium“: sowohl die individuellen als auch die kollektiven Probenantworten, Bruchspannungen und -schädigungen, fallen kleiner aus und die Streuungen dieser Werte werden geringer, wobei die Streuungen umso weniger von denen des „GP-MW-Kriteriums“ abweichen, je breiter die Grundverteilung für die Elementfestigkeiten gewählt wurden.

Bei der Untersuchung verschiedener Elementierungsverfeinerungen zeigte sich, daß die Verteilungen der Ensembleantworten, anders als beim Bündelkettenmodell, mittels einer *weakest-link*-Vorschrift in guter Näherung bezüglich der Gesamtzahl der Elemente skalierbar sind. Dieses Skalenverhalten zeigte sich unabhängig von Probengeometrie und lokalem Versagenskriterium. Allerdings ist diese Skalierungsvorschrift erst ab einer bestimmten Systemgröße gültig, die im Fall taillierter Proben oberhalb von 10×50 Elementen erreicht wurde. Eine Skalierungsvorschrift, die sich direkt auf die Grundverteilung zurückführen läßt, ist damit nicht verbunden. Eine Näherungslösung für das Kollektivverhalten von FE-Modellproben, welches durch eine analytische Transformation direkt aus der Grundverteilung der Elementfestigkeiten ableitbar ist, ist weiterhin unbekannt. Die *weakest-link*-Skalierung konnte aber für die Abschätzung des kollektiven Verhaltens von taillierten FE-Modellproben beim Vergleich mit

experimentell beobachteten Probenantworten verwendet werden, für deren modellhafte Simulation eine höhere Anzahl von Elementen erforderlich ist, als serienmäßig mit vertretbarem Aufwand berechnet werden konnten.

Experimentell beobachtete Größeneffekte stellen sich beim FE-Modell tendenziell richtig ein, d. h. bei feinerer Elementierung, äquivalent zu größeren Proben, werden die Bruchspannungen und deren Streuungen kleiner. Dies zeigt, daß sich durch Einbeziehung realistischerer Spannungsverteilungen um entstandene Mikrorisse auch das makroskopische Modellverhalten dem wirklichen Verhalten annähert. Im Modell zeigte sich ein ähnlicher Größeneffekt auch bei den Bruchschädigungen, also geringere mittlere Rißdichte und kleinere Streuung bei größeren Proben. Experimentelle Untersuchungen dazu liegen aber nicht vor, so daß hierfür ein Vergleich zwischen Modell und Realität nicht möglich war.

Der Vergleich der Bruchspannungsverteilung taillierter Proben aus γ -TiAl mit der Bruchspannungsverteilung taillierter FE-Modellproben mit unterschiedlichen Grundverteilungsbreiten zeigte gute Übereinstimmung bei einer Grundverteilung, mit der die lokalen Elementbruchspannungen aus dem Bereich von 400 MPa bis 2400 MPa generiert wurden. Ein Vergleich von gemessener Mikrorißdichte in diskreten Abständen von der Bruchkante derselben taillierten Proben und den mit dem FE-Modell für diese Grundverteilung bestimmten Rißanteilen, sowie der zugehörigen mittleren Rißschwerpunktabstände zeigte ebenfalls gute Übereinstimmung von Experiment und Modell. Daraus lassen sich zwei wichtige Schlussfolgerungen ziehen:

1. Mit den vereinfachten Ansätzen, d. h. durch eine einfache Grundverteilung für die lokalen Festigkeiten und einfachen Modellannahmen, lassen sich die gemessenen kollektiven Probenantworten durch ein Modell bereits gut wiedergeben.
2. Die Grundverteilung der lokalen Festigkeiten ist im Vergleich zur Verteilung der makroskopischen Festigkeiten sehr breit: während die makroskopischen Bruchspannungen etwa um 200 MPa schwanken, ergab sich für die Grundfestigkeitsverteilung eine Schwankungsbreite von etwa 2000 MPa, also ein um eine Größenordnung höherer Wert mit dem die makroskopischen Probenantworten richtig wiedergegeben werden konnten.

Offen blieb in dieser Arbeit die Frage nach einem lokalen Versagenskriterium, mit dem das plötzliche Durchbrechen der Proben wiedergegeben werden kann. Bei beiden Ansätzen der FE-Modellierung zeigten sich sogenannte *post-peak*-Spannungen, also Probenspannungen, die nach Überschreiten der Probenmaximallast nicht auf null zurückfielen. Mit diesen Spannungen ist auch ein jenseits der Maximallast auftretendes Delaminierungsverhalten verknüpft, das sowohl beim Kohäsivmodell als auch beim Modell mit versagenden Kontinuumelementen beobachtet wurde. Bei dieser Verformung werden die Elemente der Modellprobe hauptsächlich schubverformt. Ein makroskopisch orientiertes Normalspannungskriterium zur Beschreibung des mikroskopischen Versagens, wie es in dieser Arbeit zugrundegelegt wurde, ist dabei sicher ein Grund für dieses im Experiment nicht beobachtete Verhalten. In einer Weiterführung der Arbeiten wäre es daher sinnvoll, zunächst ein Versagenskriterium einzuführen, bei dem die Hauptspannungskomponenten für das Versagen maßgeblich sind, und danach weitere Modifikationen des Versagenskriteriums zu untersuchen mit dem Ziel, das unphysikalische *post-peak*-Verhalten zu unterdrücken.

Um zu einer *local-load-sharing*-Regel für das Bündelkettenmodell zu gelangen, mit der sich mikromechanisch begründete richtige Lastverteilung einstellen kann, müssen schichtübergreifende Anteile bei der Lastumverteilung nach dem Versagen eines Elements berücksichtigt werden, wofür die bisher in der Literatur behandelten LLS-Regeln, die Lasten nur *innerhalb*

von Schichten umverteilen, nicht geeignet sind und ein völlig neuer Ansatz notwendig wird, der sich von der Motivation, analytisch ermittelbare asymptotische Lösungen zu finden, abwendet und stattdessen an den Möglichkeiten computergestützter Simulation orientiert. Die Spannungsverteilung in der Umgebung von gebrochenen Elementen beim FE-Modell liefert dazu erste Anhaltspunkte (vgl. z. B. den Farbverlauf in Abbildung 10.67, Inkrement 35, um das obere mittig gebrochene Element). Der Verlauf des Spannungsfelds in der Umgebung von Rissen in homogenen Werkstoffen wäre ein weiterer Ansatz, um zu einer Abschätzung für eine mechanisch begründete schichtübergreifende Lastverteilungsregel zu gelangen. Selbst bei komplizierten Regeln wäre dabei zu erwarten, daß ein statistisches Versagensmodell gewonnen würde, welches – wenn auch langsamer als das bisherige Bündelkettenmodell – deutlich schneller numerisch zu behandeln ist als das FE-Modell und damit der wichtigsten Forderung für ein statistisch anwendbares Modell Rechnung trägt.

Einer der Hauptgründe für die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen, ein FE-Modell mit Flächenelementen zu verwenden, bestand darin, das Modell so zu formulieren, daß es im Prinzip auf elastisch–plastisch–sprödes Elementverhalten erweitert werden konnte. Für das hier implementierte Elementverhalten hätte eines der in der Literatur viel verwendeten Balkengittermodelle ausgereicht. Dies hätte aber außer der etwas einfacheren Implementierbarkeit keine Vorteile gebracht, da sich die Anzahl der Freiheitsgrade und die Notwendigkeit zur Lösung gekoppelter Gleichungssysteme nicht geändert hätte. Da jedoch nicht ersichtlich ist, wie man in einem Balkengittermodell eines der bekannten elastisch–plastischen Kontinua beschreiben könnte, wurde dieser Weg nicht beschritten. Um das kollektive Bruch- und Schädigungsverhalten von Titan-Aluminium zu beschreiben, erwies sich – wie in dieser Arbeit gezeigt – die Annahme elastisch–spröden Verhaltens in Verbindung mit einem lokalen statistischen Bruchkriterium als ausreichend. Für die Behandlung duktiler Werkstoffe müßten elastisch–plastische Stoffgesetze eingeführt werden, die ein inkrementelles Vorgehen nicht nur bei lokalen Bruchvorgängen, sondern während der gesamten Lastgeschichte erfordern würden. Daß hierdurch das Problem der großen Rechenzeiten erheblich verschärft würde, muß nicht weiter ausgeführt werden.

Schließlich soll noch auf zwei weitere wichtige Aspekte zur Motivation von Simulationen, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt wurden, hingewiesen werden. So ist zum einen die Herstellung und experimentelle Untersuchung von Stichproben statistisch signifikanten Umfangs (ca. 100 Einzelproben pro Stichprobe) ausgesprochen aufwendig und es erscheint fast unmöglich, reale Experimente an vielen verschiedenen Stichproben durchzuführen, wie dies in Simulationen möglich ist – immerhin wurden in den Tabellen und Abbildungen dieser Arbeit etwa 2 000 Modellproben allein mit dem FE-Modell analysiert. Ein weiterer Aspekt aber ist die Möglichkeit, durch Computereperimente einen Vorgang zeitlich zu dehnen und damit im Detail zu untersuchen, der in der Realität extrem schnell abläuft und deshalb selbst mit hochauflösenden Geräten in Verbindung mit Hochgeschwindigkeitskameras nicht zu erfassen ist. So muß sich die Beobachtung des Bruchvorgangs in spröden oder quasi-spröden Werkstoffen auf einen Vergleich der Zustände vor und nach dem Bruchvorgang beschränken. Simulationen jedoch ermöglichen die Berechnung und damit das Festhalten von Zwischenzuständen und tragen auf diese Weise zu einem besseren Verständnis derartiger Bruchvorgänge bei. Diese Arbeit kann hoffentlich einen kleinen Beitrag dazu leisten.

Kapitel 10

Farbige Abbildungen

(Seitenzahlen in Klammern bezeichnen die Seite, auf der die jeweilige Abbildung besprochen wird)

Abbildung 10.1: Rißdichten aus Tabelle 2.1, die an 4 taillierten Mikroflachzugprobenhälften in unterschiedlichen Abständen von der Bruchkante gemessen wurden. (nach [83]) (s. S. 14)

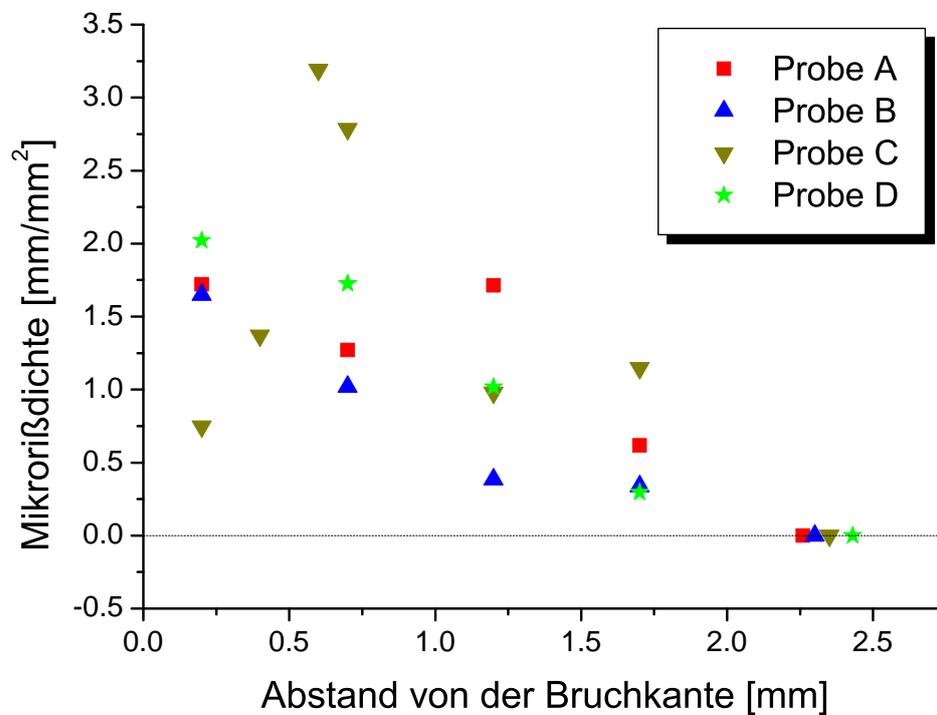
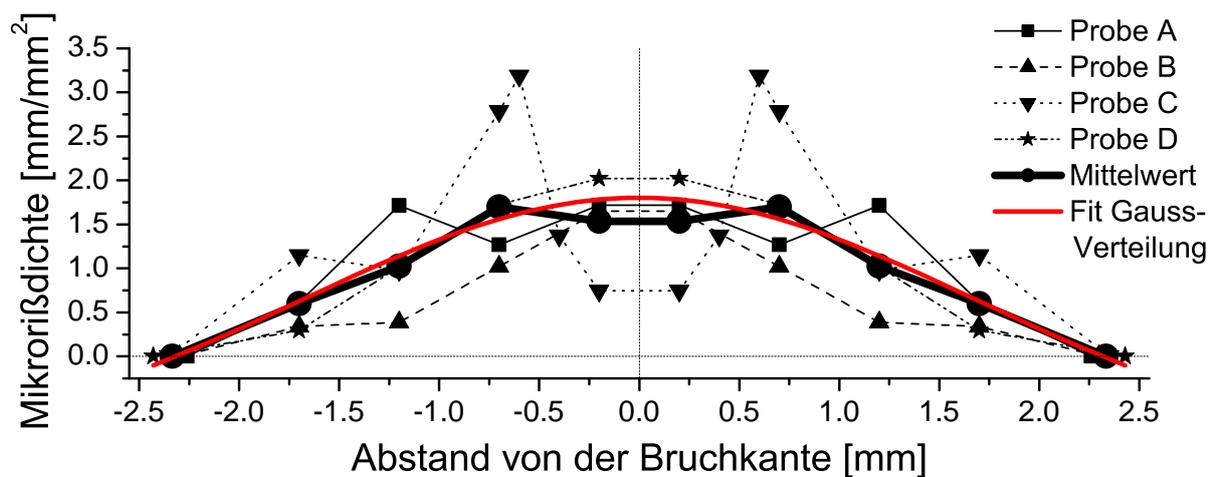
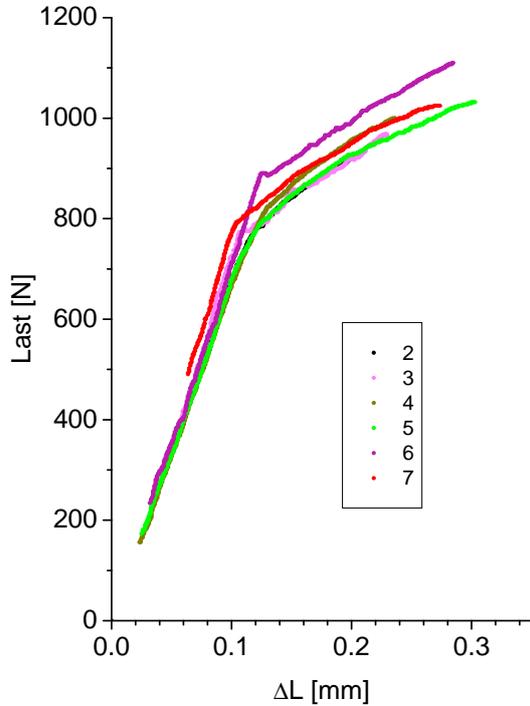


Abbildung 10.2: gemessene Rißdichten an der Bruchkante gespiegelt; errechnete Mittelwerte für die einzelnen Abstände und Approximation der Punkte durch eine GAUSS-Verteilung als Beispiel für eine möglichen Ausgleichskurve.

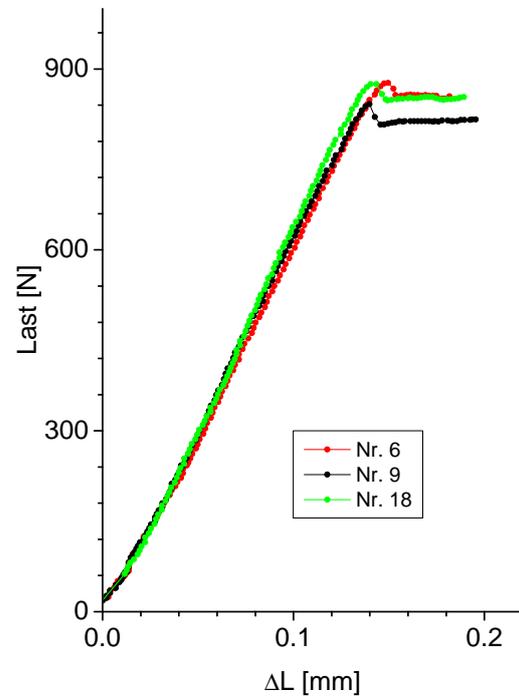


Abbildungen 10.3–10.6: Auflagerkraft über Auflagerverlängerung von Mikroflachzugproben verschiedener TiAl-Werkstoffe. (B =Probenbreite, D =Probendicke)

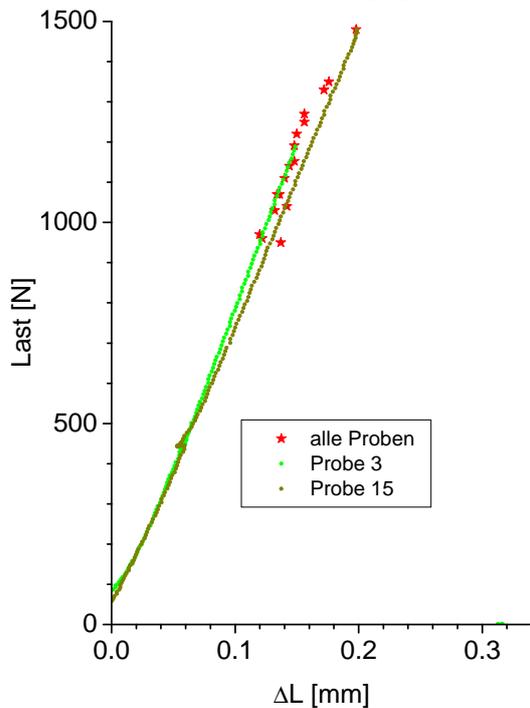
Abbildungung 10.3: γ -TiAl (taill.: $B_{\min}=2\text{ mm}$, $D=1\text{ mm}$) (S. 15) (aus [82])



Abbildungung 10.4: TAB ($B=2\text{ mm}$, $D=1\text{ mm}$) (S. 16) (aus [82])



Abbildungung 10.5: TSA ($B=2\text{ mm}$, $D=1\text{ mm}$) (S. 17) (aus [82])



Abbildungung 10.6: TSA-Blech ($B=2\text{ mm}$, $D=1.5\text{ mm}$) (S. 17) (aus [82])

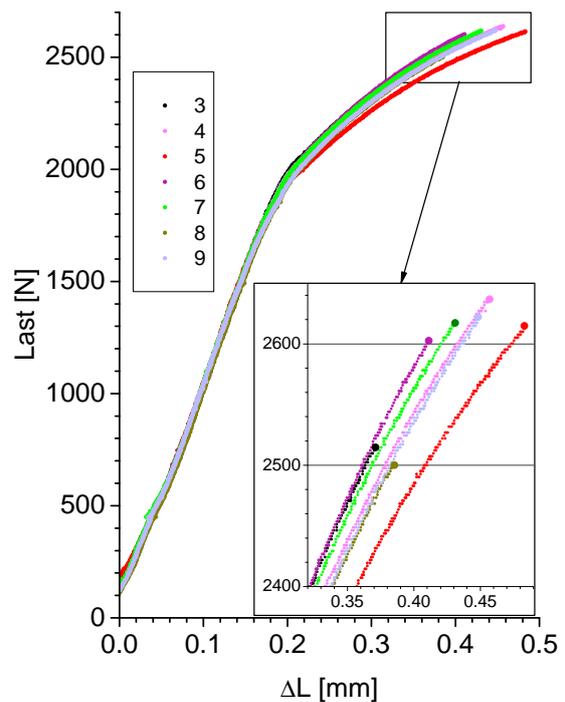


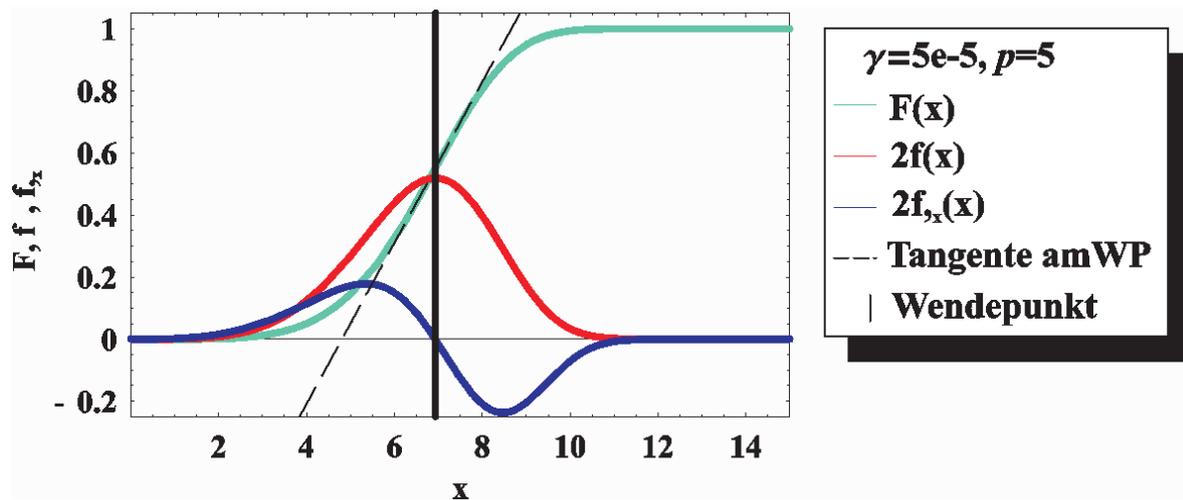
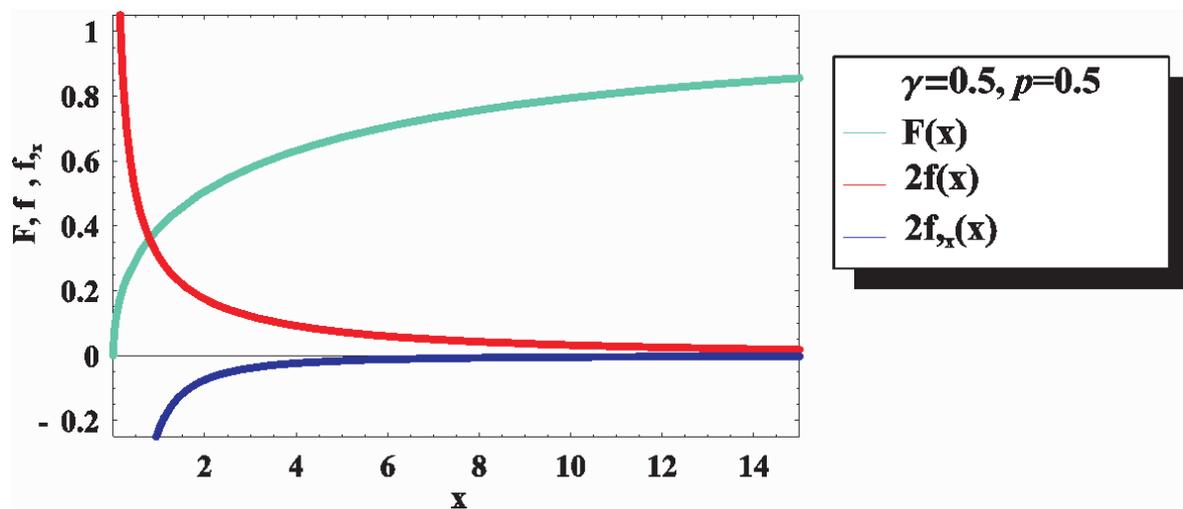
Abbildung 10.7: Zweiparametrische WEIBULL-Funktion nach Gl. (3.12) für $p > 1$ (S. 25)Abbildung 10.8: Zweiparametrische WEIBULL-Funktion nach Gl. (3.12) für $p \leq 1$ (S. 25)

Abbildung 10.9: Das Bild zeigt, wie die linke obere Ecke, an der nur Knotenfesseln in vertikaler Richtung ansetzen, durch den Bruch des grauen Elements in Inkrement 76 völlig vom Rest des Systems abgetrennt wird. (S. 55)

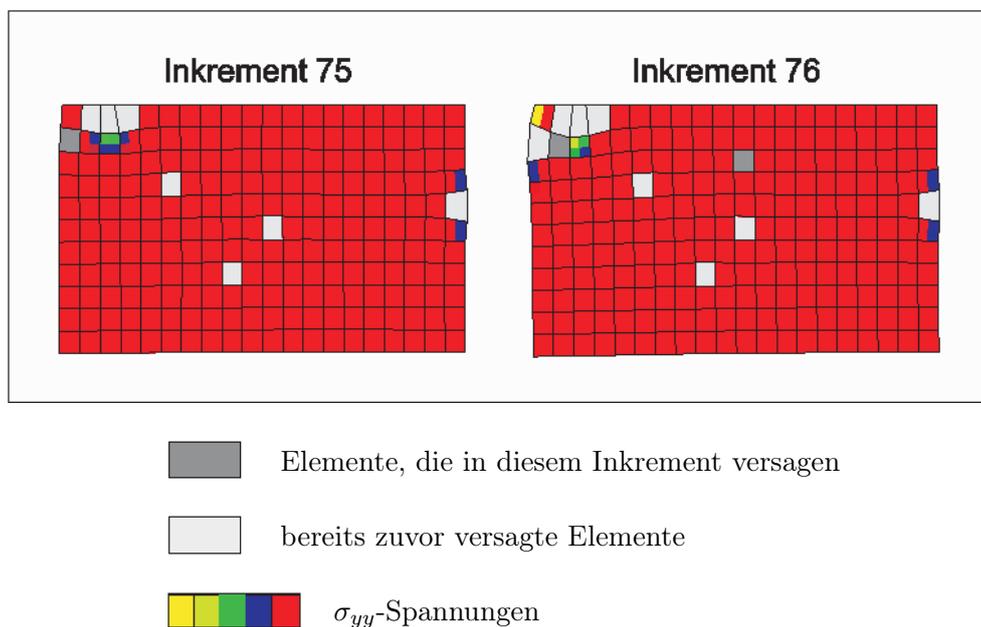


Abbildung 10.10: Last-Schädigungskurve bei unterschiedlicher Übertragung der generierten Grenzfestigkeiten in die Kohäsivelemente des FE-Modells. (S. 62)

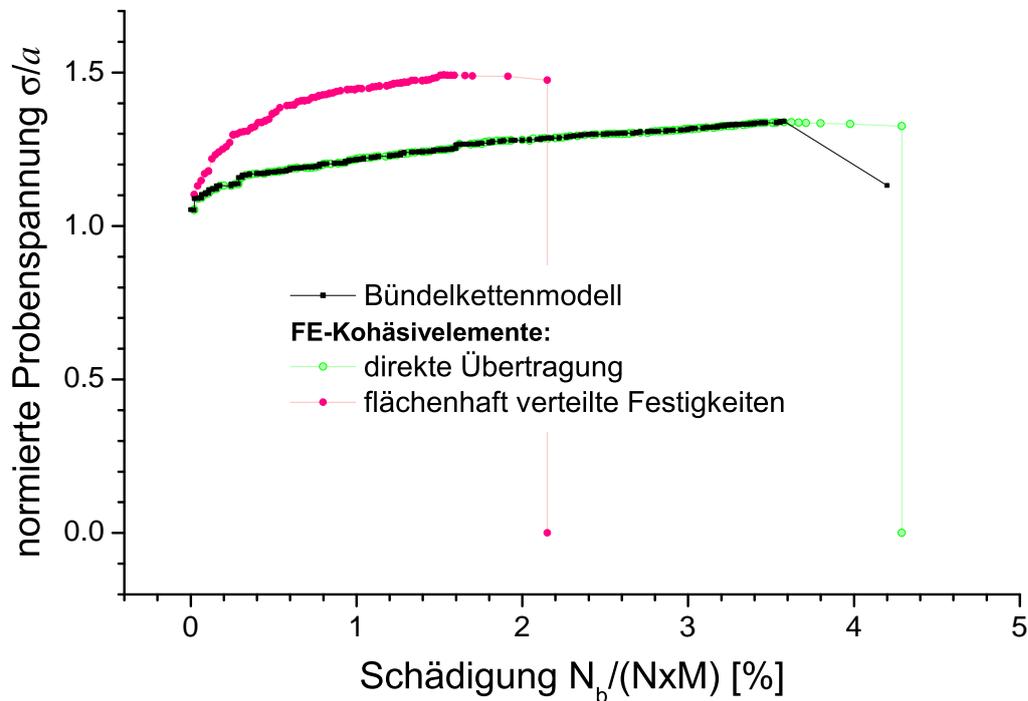


Abbildung 10.11: resultierende Häufigkeitsverteilung (oben) und kumulative Häufigkeit (unten) der Grenzfestigkeiten an den Kohäsivelementen für die Proben aus Abbildung 10.10 (S. 62)

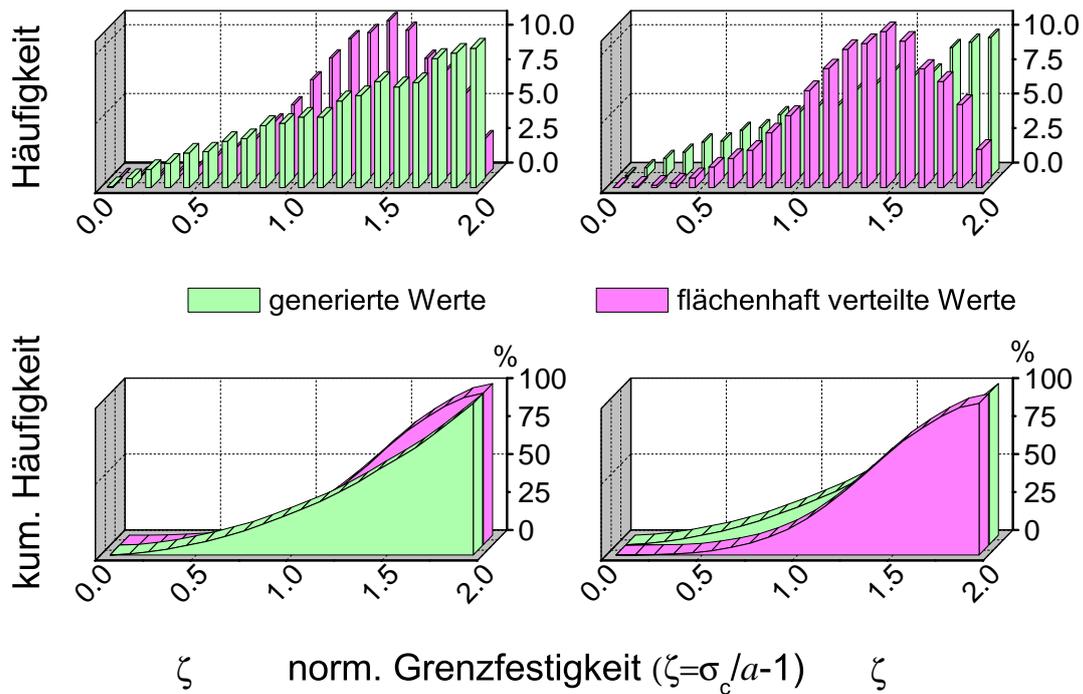


Abbildung 10.12:

Schrittsteuerung am Beispiel der taillierten Modellprobe der Abbildungen 10.66 und 10.67. Die bei der Erhöhung der Randverschiebung auftretende zusätzliche Schädigung wirkt sich erst nach Abschluß eines Inkrements auf die Randlast aus.

Nach Erreichen des Kraftmaximums steigt die Schädigung exponentiell an. (S. 69)

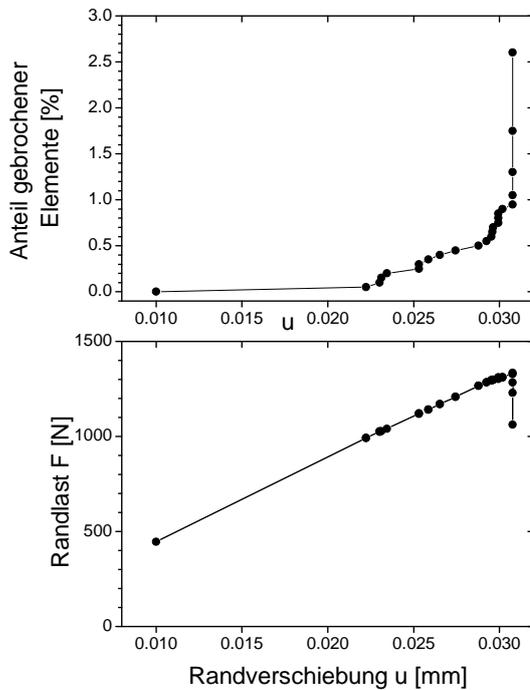
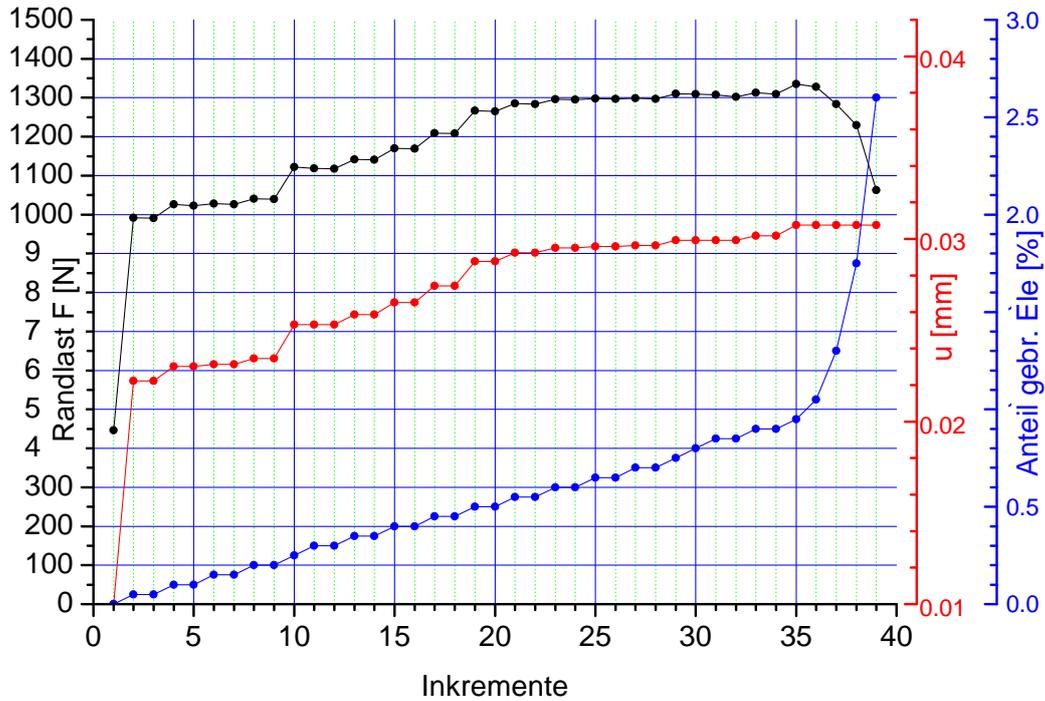


Abbildung 10.13:

Verlauf von Randlast, Randverschiebung und Schädigung des oberen Beispiels, diesmal aufgetragen über Systemgrößen statt über der Schrittinkrementierung. (S. 69)

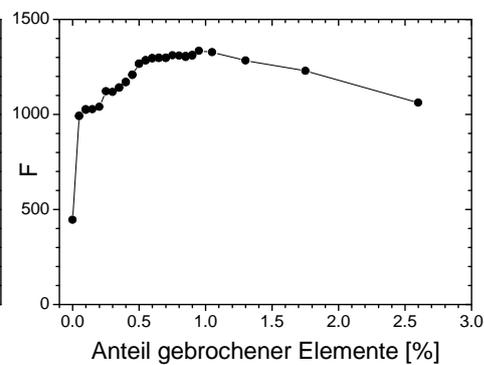


Abbildung 10.17: Bündelspannungsverlauf über Faserspannungen der Modellproben mit extremer Bündelbruchspannung. Der Zick-Zack-Verlauf entsteht durch den Abfall der Bündelspannung nach Faserbruch bei gleichzeitigem Festhalten der äußeren Verschiebung. (S. 76)

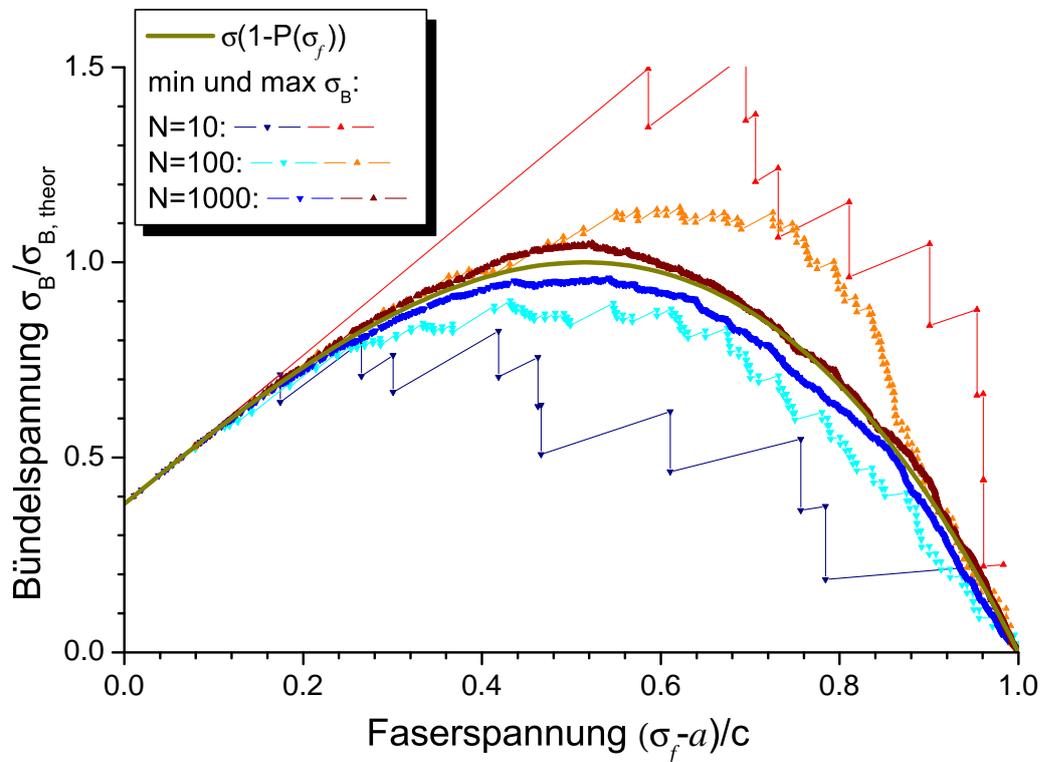


Abbildung 10.18: Bündelbruchspannungen, σ_B , vs. Faserspannungen bei Bündelbruch, σ_f^t , für verschiedene Bündelgrößen (S. 76)

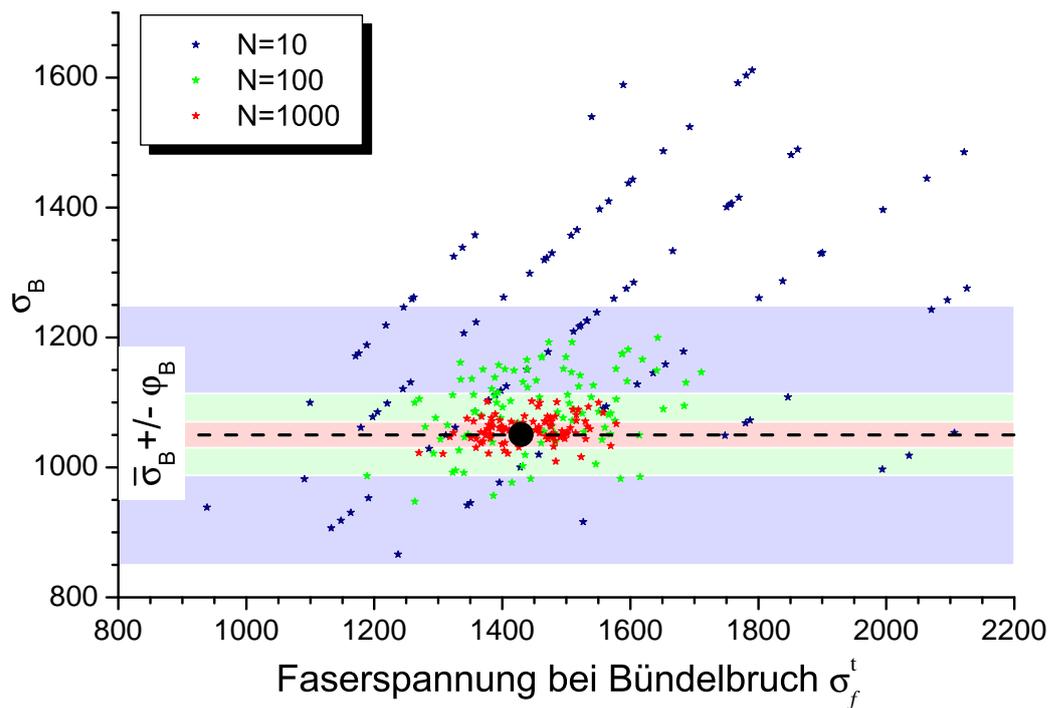


Abbildung 10.19: kumulative Verteilungsfunktionen der Bündelbruchspannungen für verschiedene Bündelgrößen nach der Theorie für große Bündel und berechnete Werte (S. 76)

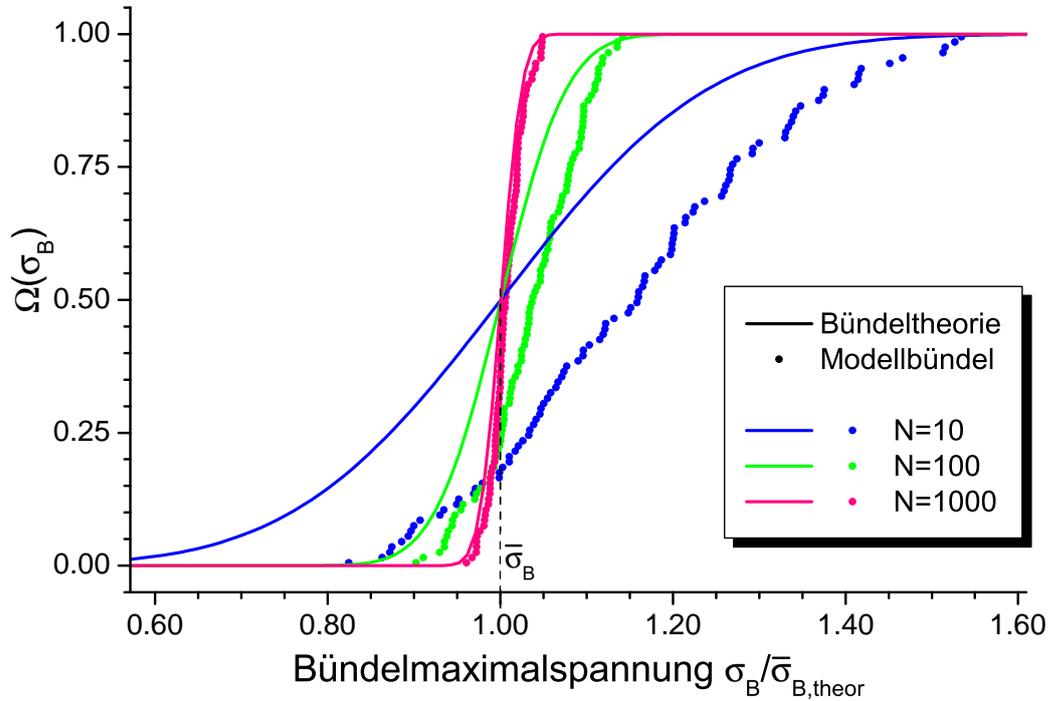


Abbildung 10.20: kumulative Bruchspannungsverteilung $\Omega(\sigma)$ kleiner Bündel und deren Extremfall eines einfasrigen Bündels; es ist deutlich zu sehen, daß eine Normalverteilungsannahme der Bündelspannungen im Grenzfall unrealistisch ist (S. 78)

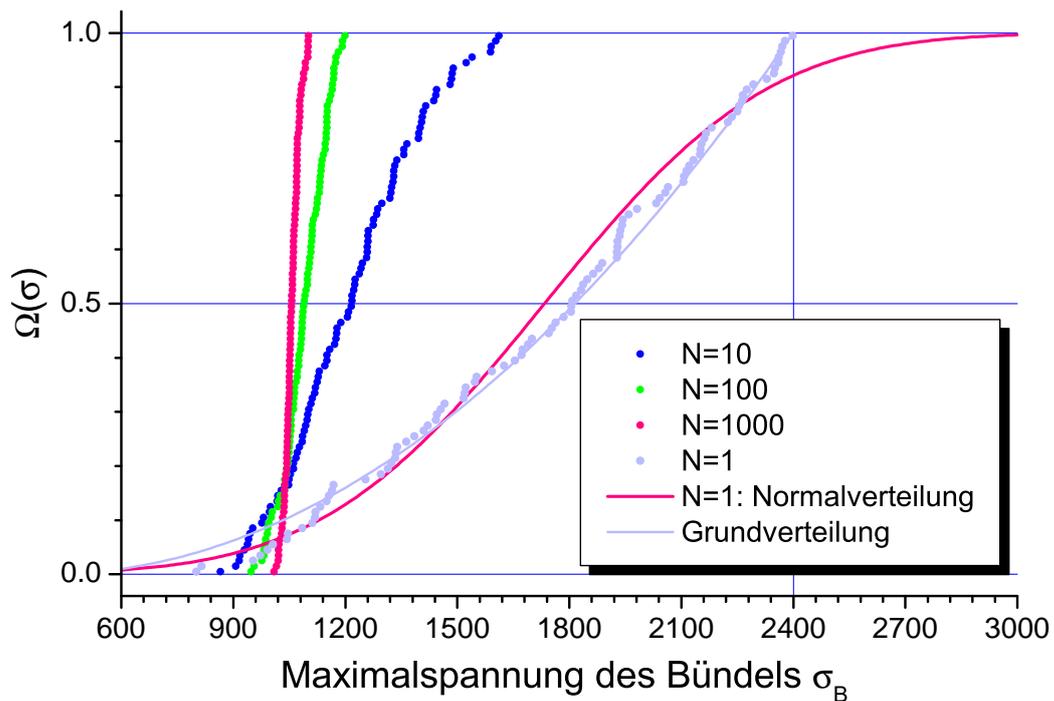


Abbildung 10.21: Bündelspannung als 3D-Funktion der Faserspannung und Schädigung, b . Zur Veranschaulichung wurde eine Ebene konstanter Bündelspannung eingezeichnet. (S. 79)

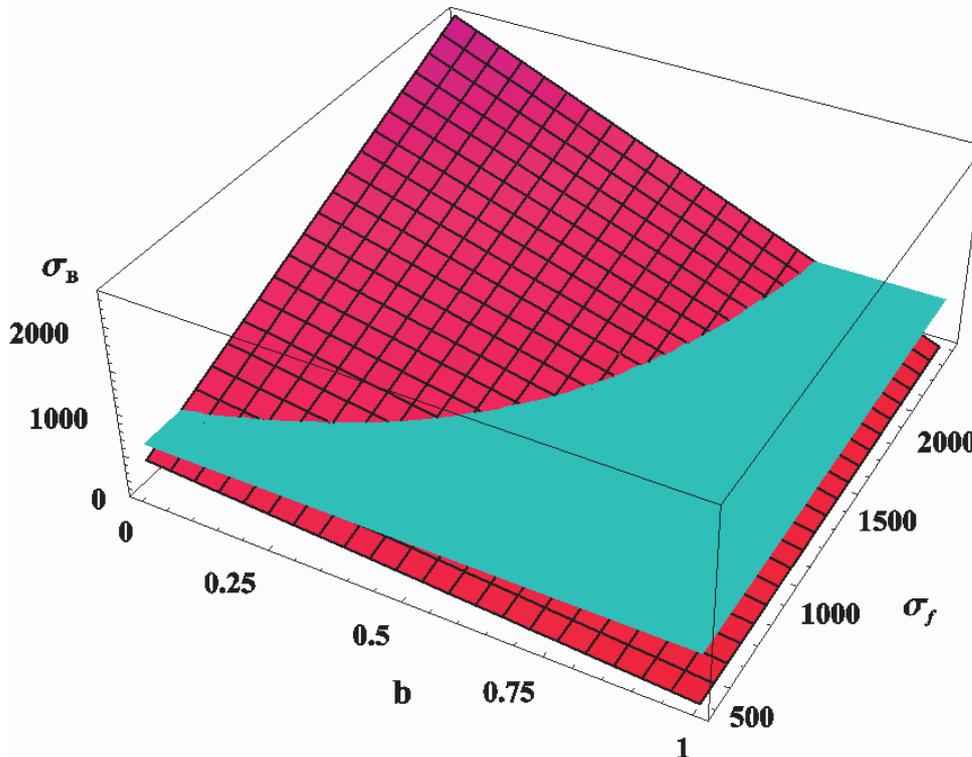


Abbildung 10.22: einfache Bündel: gewählte Probability-Funktion $P(\sigma_f)$ und Höhenlinien gleicher Bündelspannung; mittlere Bündelspannung und Bereich der Standardabweichung $\bar{\sigma}_B \pm \varphi_B$ für Bündelgröße $N=100$ (beachte die Spiegelung der Achsen gegenüber Abb. 10.21). (S. 80)

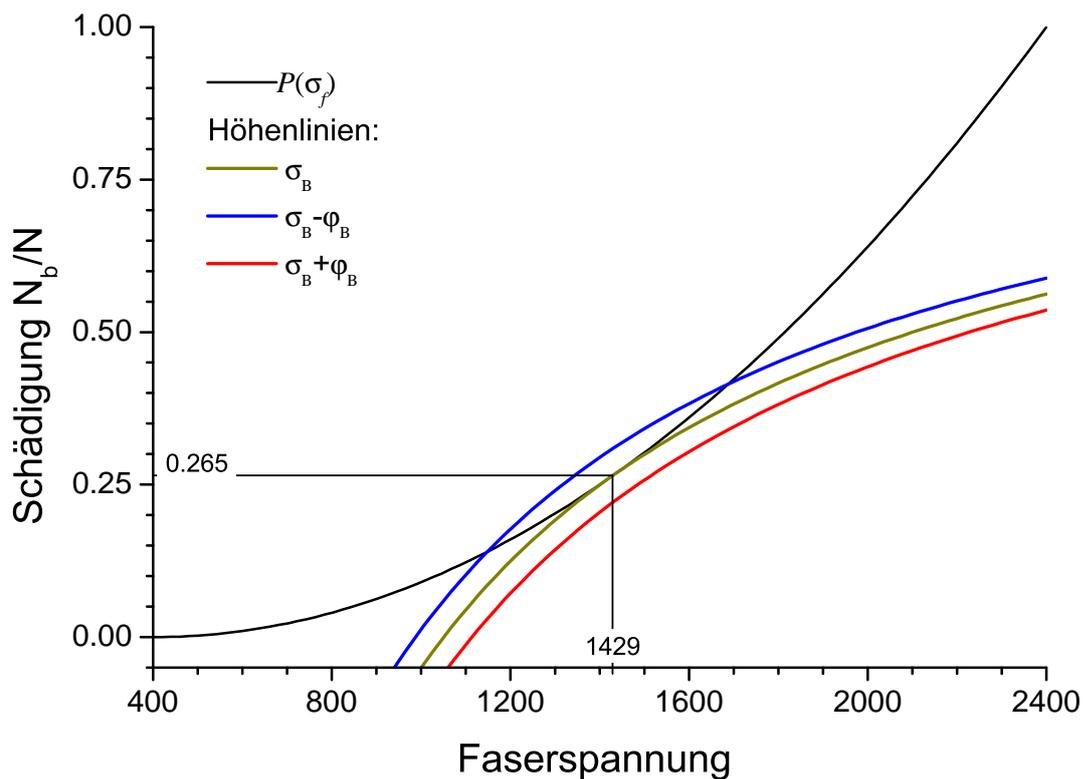


Abbildung 10.23: einfache Bündel: Faserspannung und Schädigung für alle Rechnungen der Bündelgröße $N=100$. Dunkle Punkte markieren die Werte maximaler Bündelspannung. (S. 81)

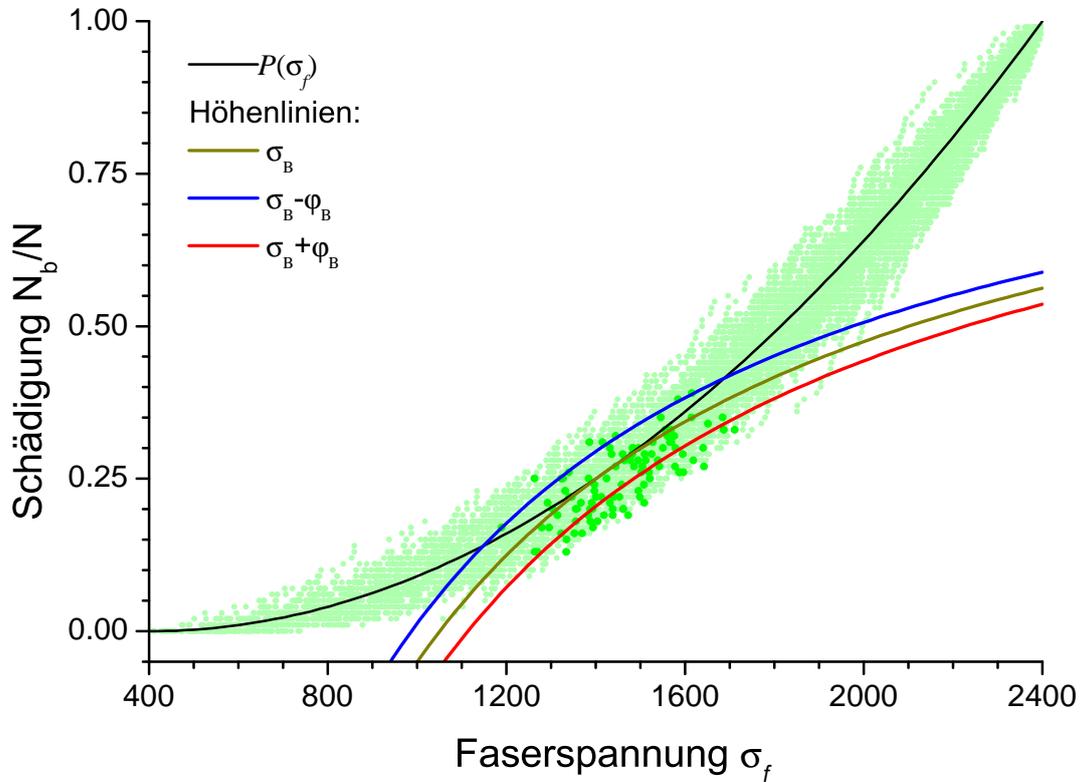


Abbildung 10.24: einfache Bündel: Schädigung und Faserspannung bei Bündelbruch für verschiedene Bündelgrößen N (S. 81)

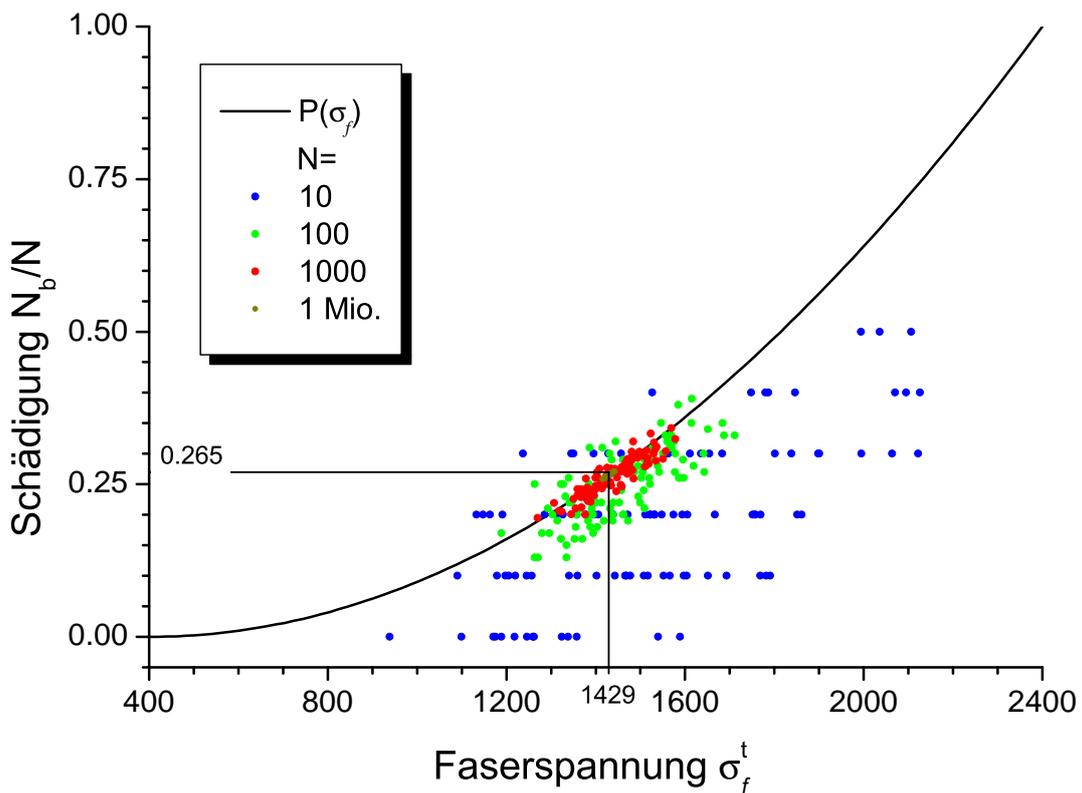


Abbildung 10.25: einfache Bündel: kumulative Faserspannungsverteilung für verschiedene Bündelgrößen. Zur Orientierung sind die errechneten Bündelbruchspannungsverteilungen mit eingezeichnet. (S. 81)

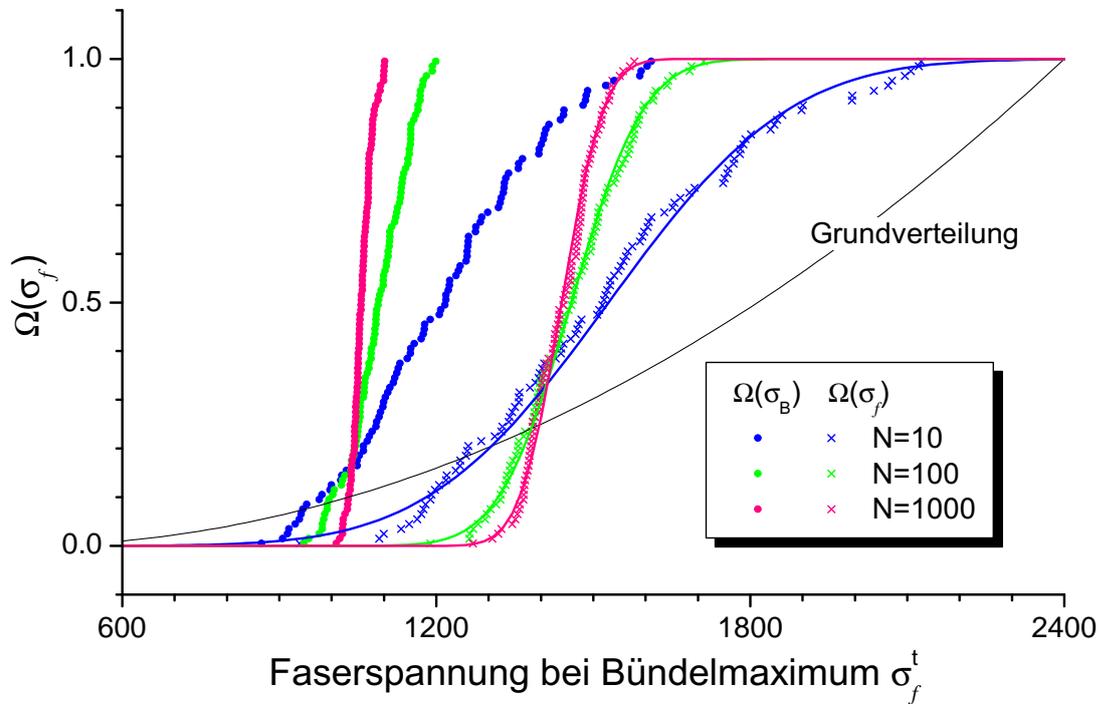


Abbildung 10.26: einfache Bündel: kumulative Schädigungsverteilung $\Omega(b)$ für verschiedene Bündelgrößen und normalverteilte Ausgleichskurven. (S. 81)

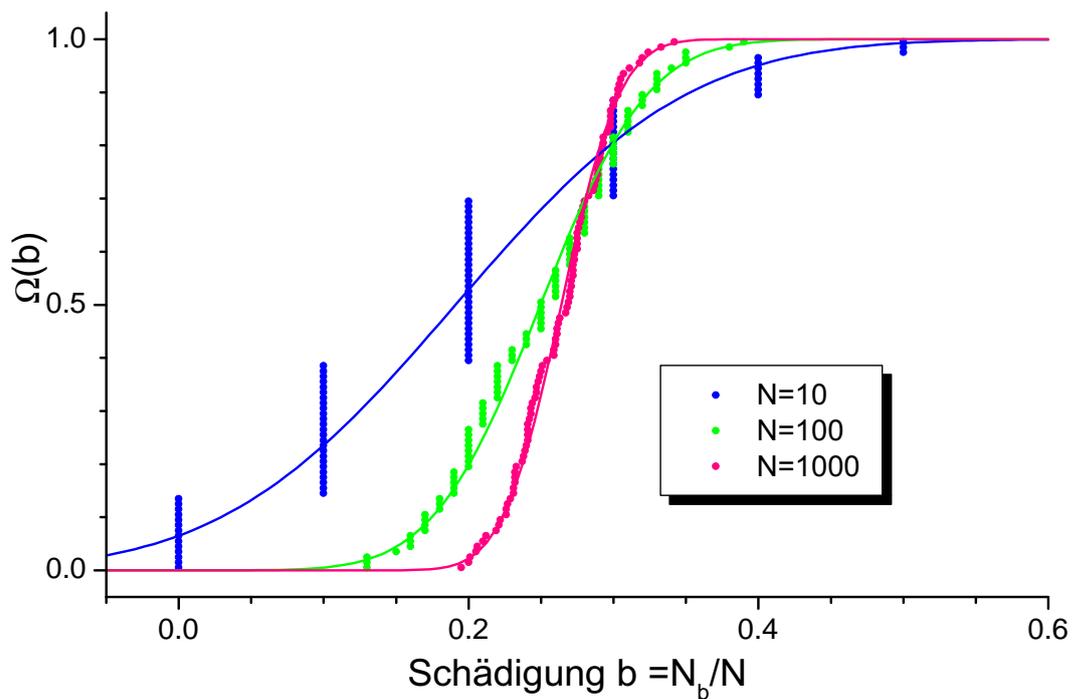


Abbildung 10.27: Bruchspannungsverteilung, $\Lambda(\sigma_C)$, für Bündelketten verschiedener Größen $N \times M$. Die gestrichelten Kurven sind die skalierten Bruchspannungsverteilungen für unendlich große Bündel nach Daniels [19]. (S. 82)

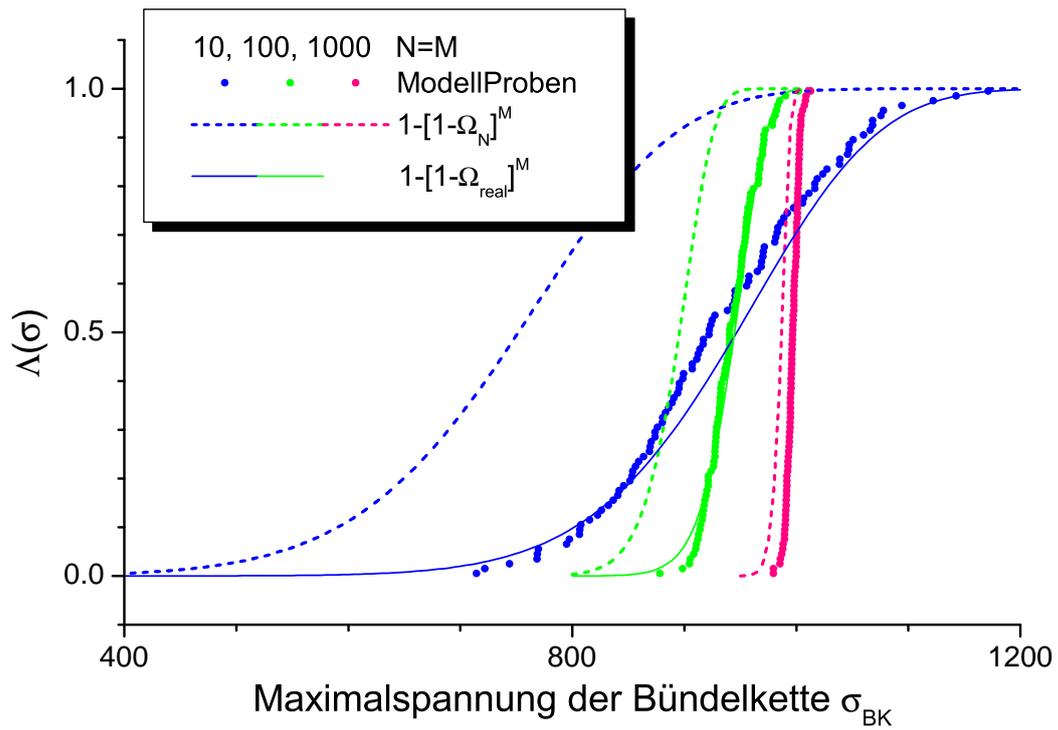


Abbildung 10.28: einfache Bündel: Bruchspannungsverteilung bei ELS und LLS (S. 84)

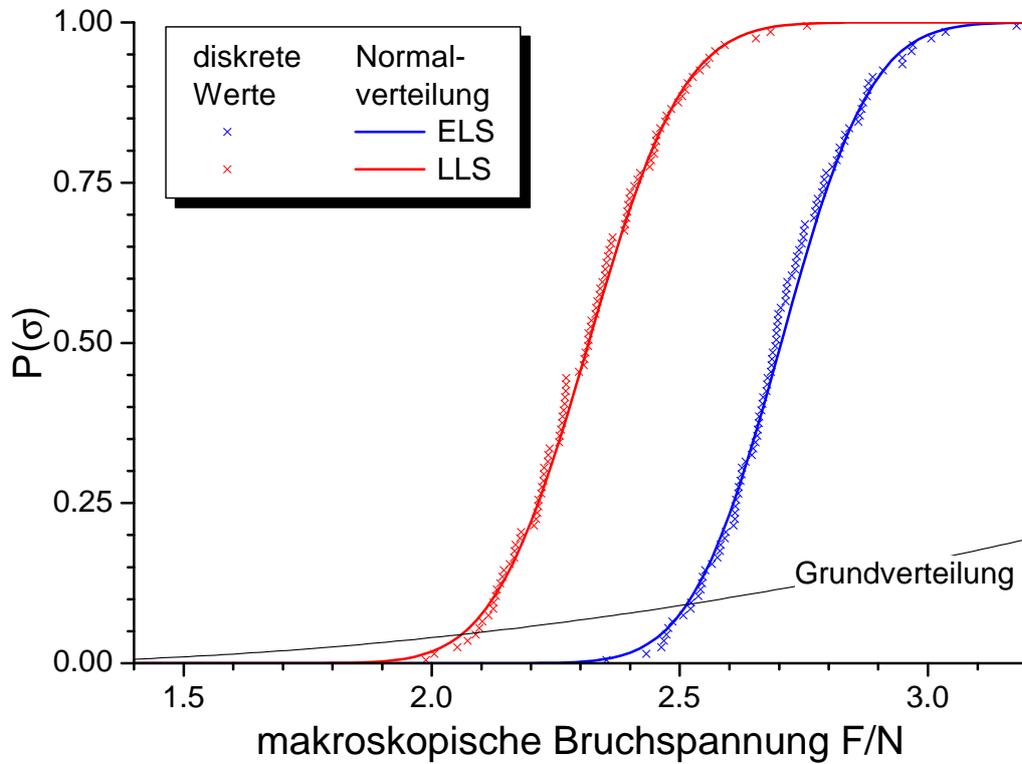


Abbildung 10.29: einfache Bündel: Schädigungsverteilung bei ELS und LLS (S. 84)

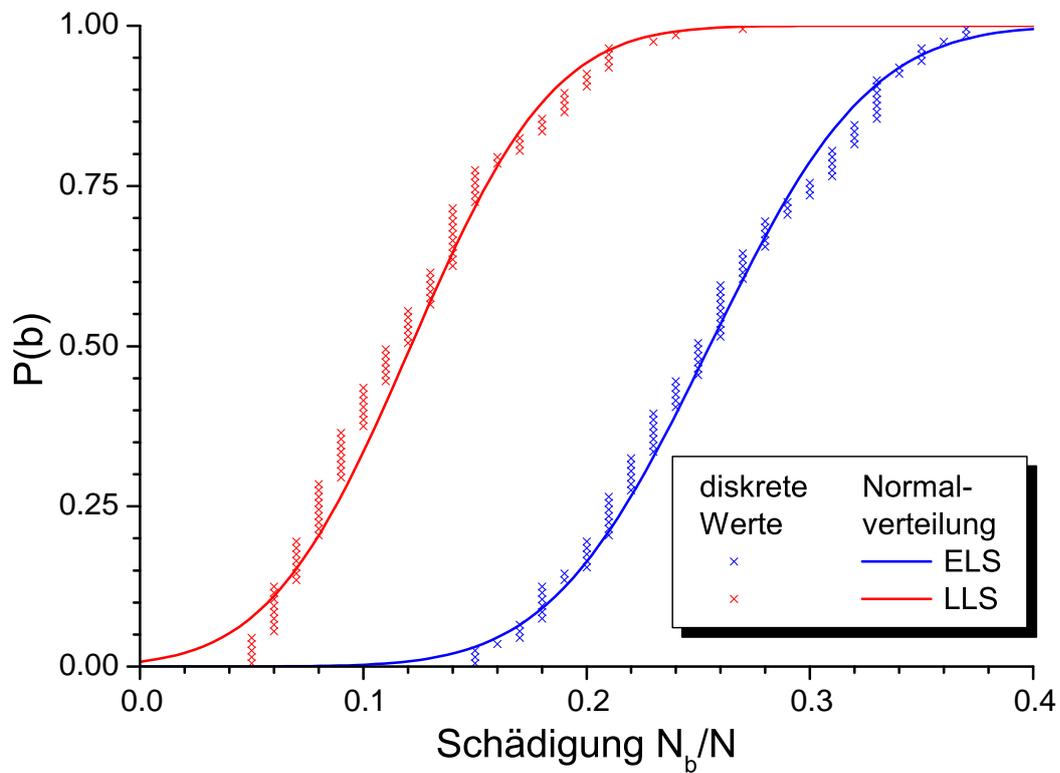


Abbildung 10.30: skalierte Bündelkettenbruchspannungsverteilung bei ELS und LLS. Skaliert wurde hier die Verteilung der einfachen Bündel auf Bündelketten mittels der *weakest-link*-Skalierung. (S. 84)

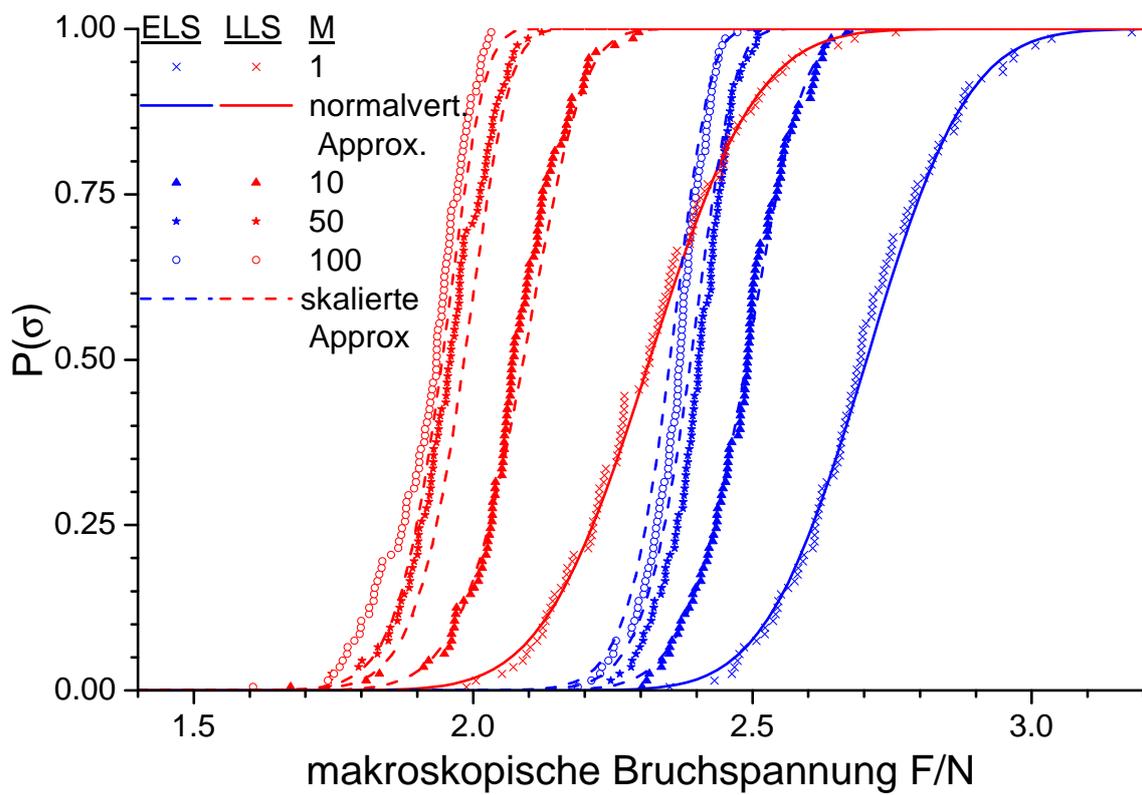


Abbildung 10.31: *weakest-link*-skalierte Bündelkettenschädigung bei ELS aus der Verteilung der einfachen Bündel. (S. 85)

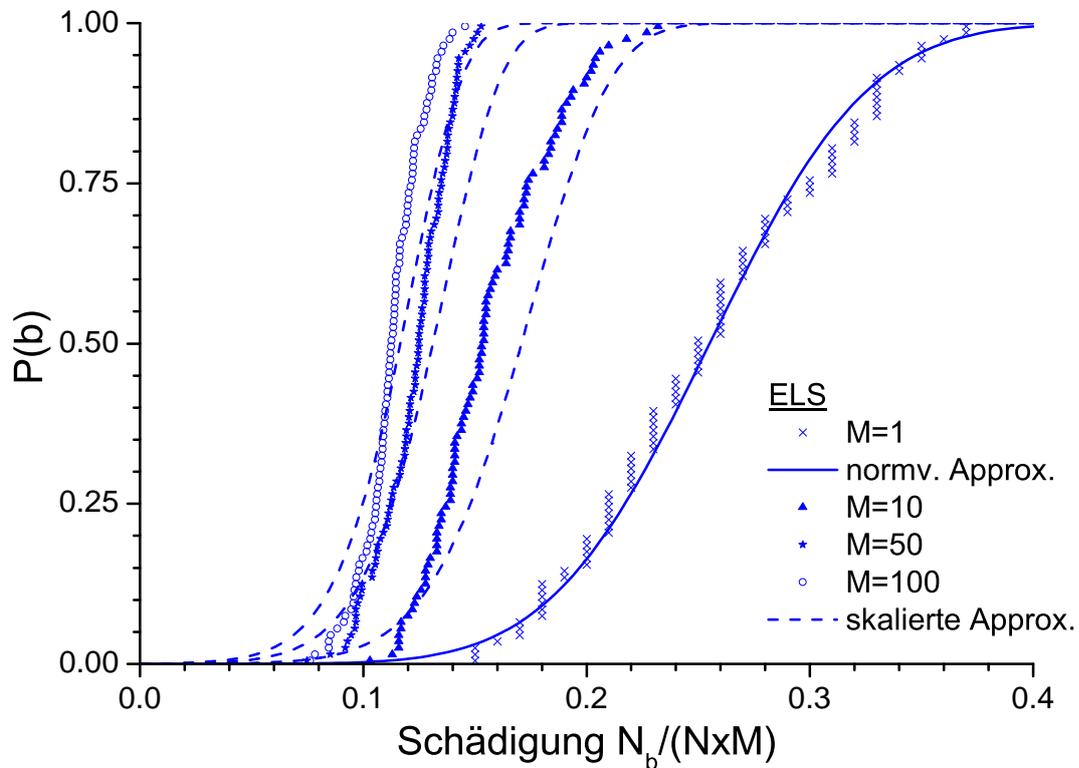


Abbildung 10.32: *weakest-link*-skalierte Bündelkettenschädigung bei LLS aus der Verteilung der einfachen Bündel. (S. 85)

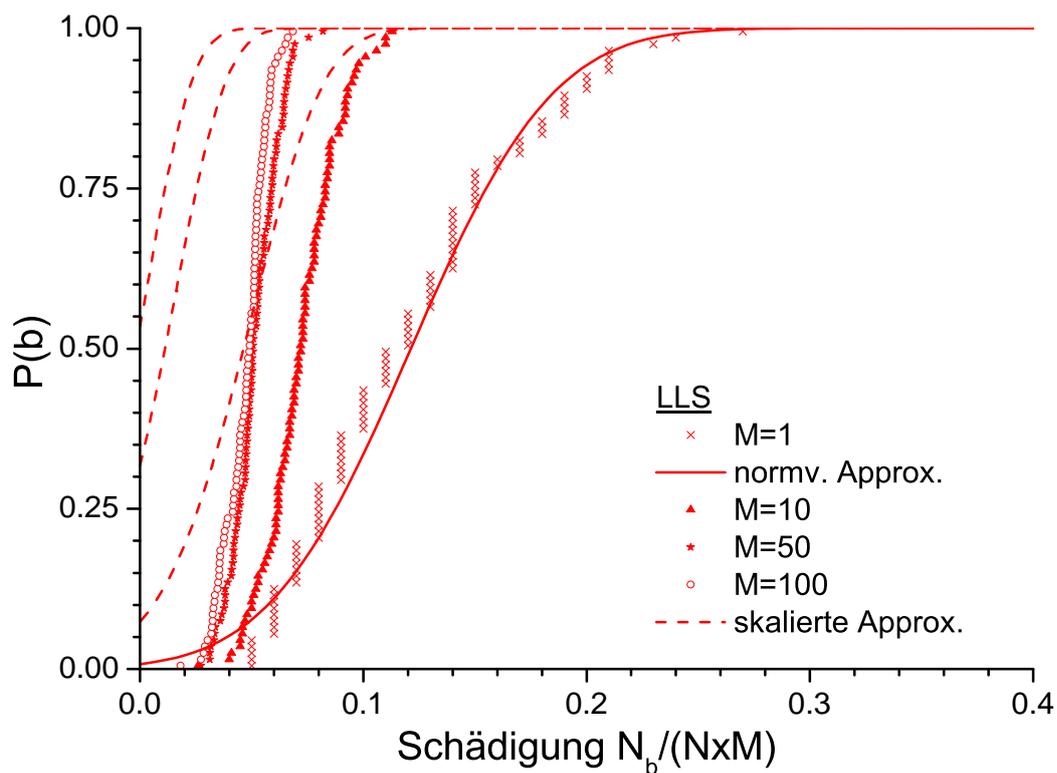


Abbildung 10.33: *weakest-link*-skalierte Bündelkettenschädigung bei ELS; Referenzkonfiguration ist hier eine kurze Bündelkette der Länge $M=10$. (S. 85)

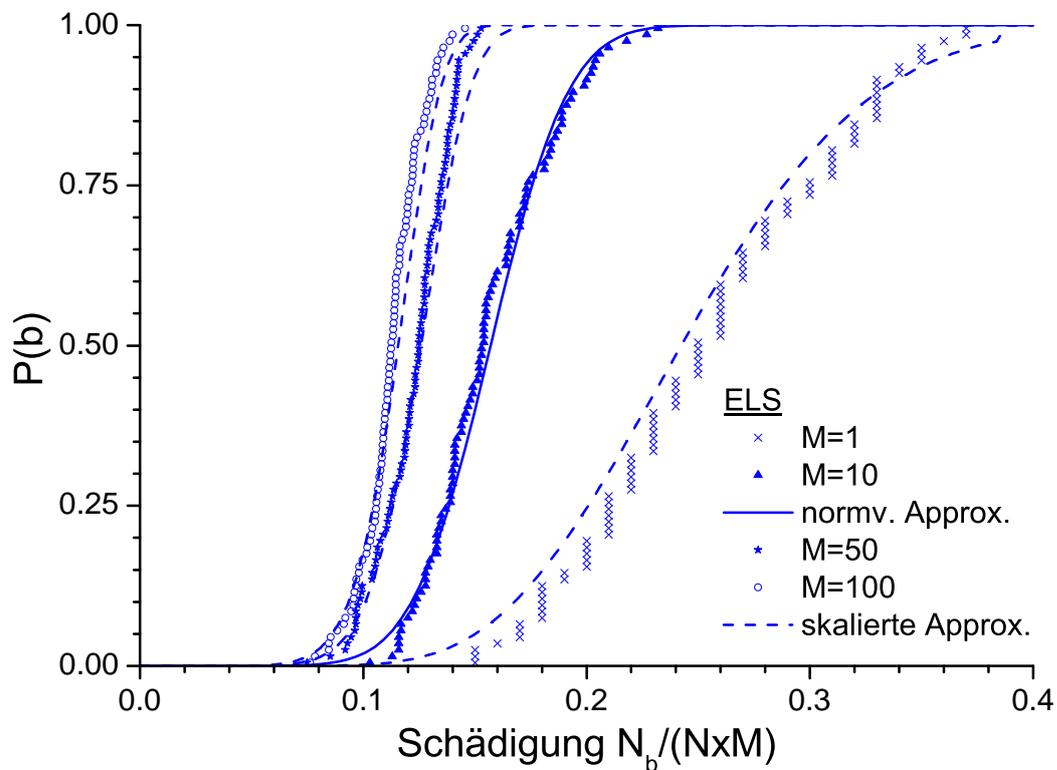


Abbildung 10.34: *weakest-link*-skalierte Bündelkettenschädigung bei LLS; Referenzkonfiguration ist hier eine kurze Bündelkette der Länge $M=10$. (S. 85)

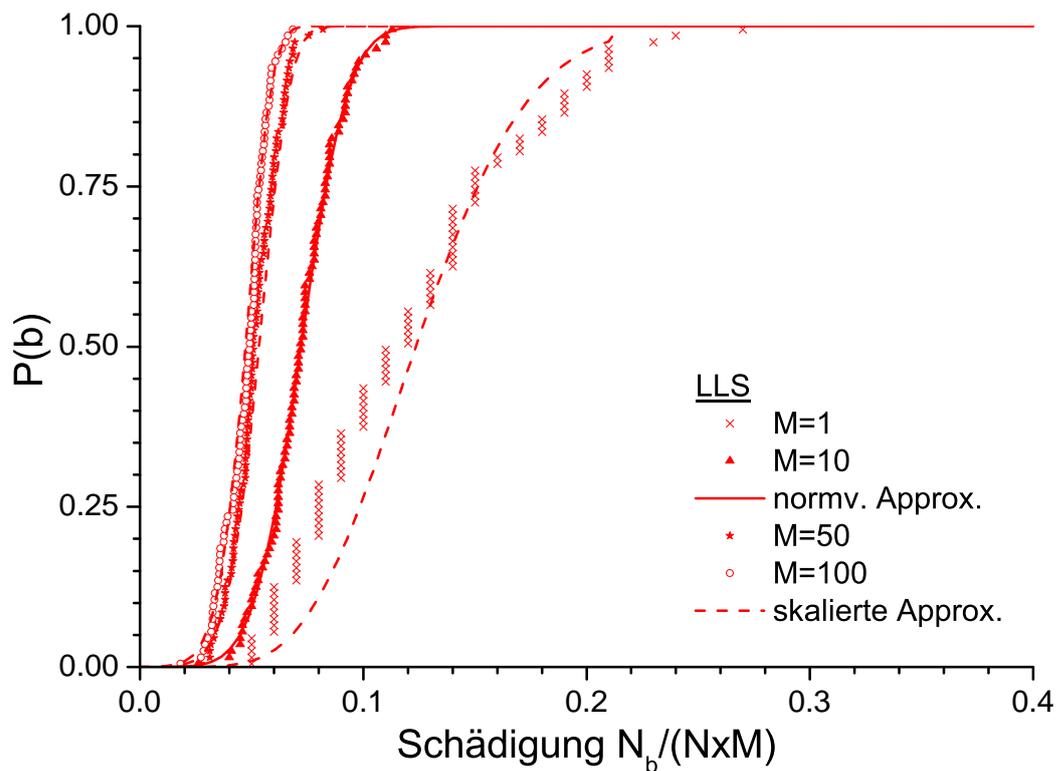


Abbildung 10.35: Bruchspannungsverteilung für 2 Bündelkettengrößen bei $M:N=5$ und LLS mit $f_{Rf}=0.5$; *weakest-link*-Skalierung nach der Gesamtanzahl der Fasern. (S. 86)

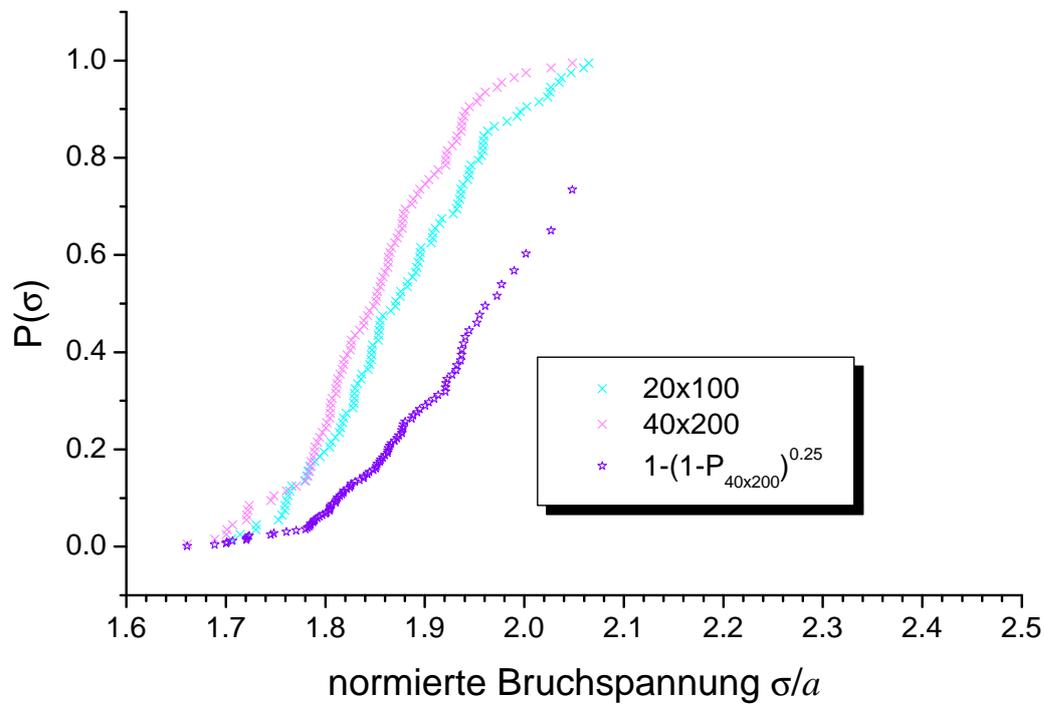


Abbildung 10.36: Schädigungsverteilung für 2 Bündelkettengrößen bei $M:N=5$ und LLS mit $f_{Rf}=0.5$; *weakest-link*-Skalierung nach der Gesamtanzahl der Fasern. (S. 86)

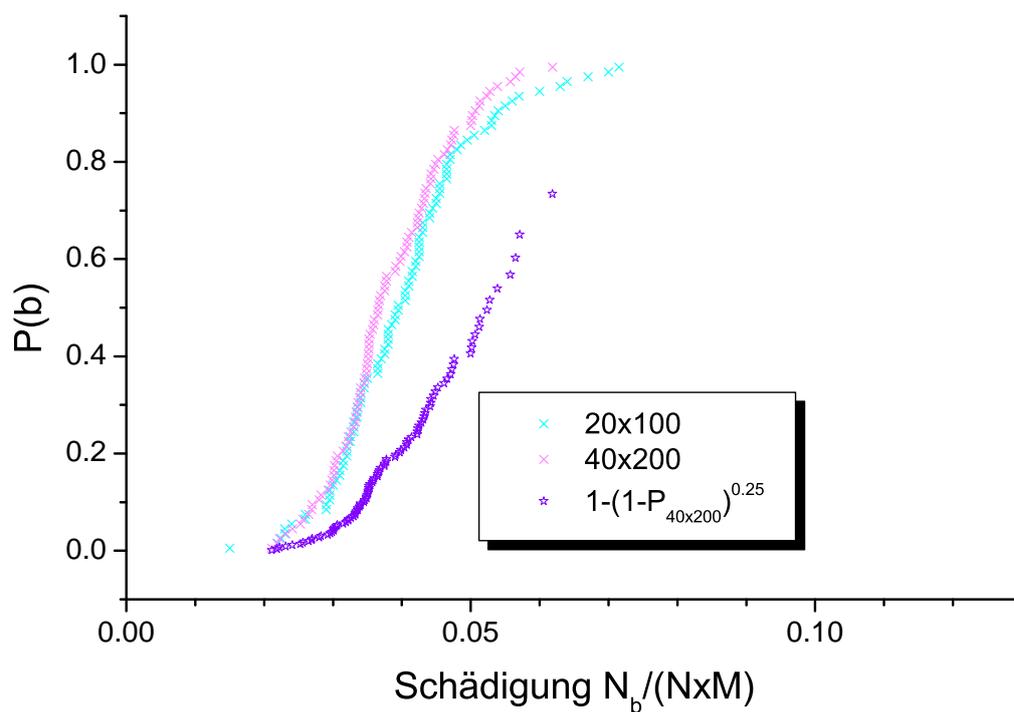


Abbildung 10.37: Mittlere Bündelkettenspannungen \pm Streuung kleiner Proben. Im Extremfall der reinen Kette fällt der Mittelwert der Modellrechnungen mit dem theoretisch ermittelten Wert zusammen. (S. 88)

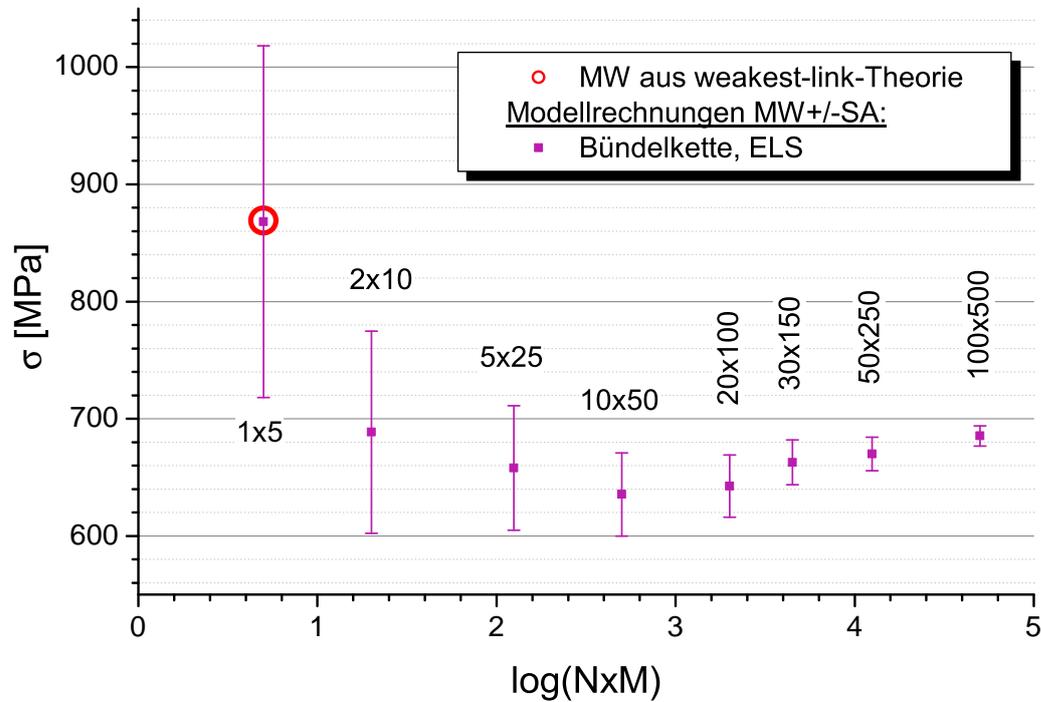
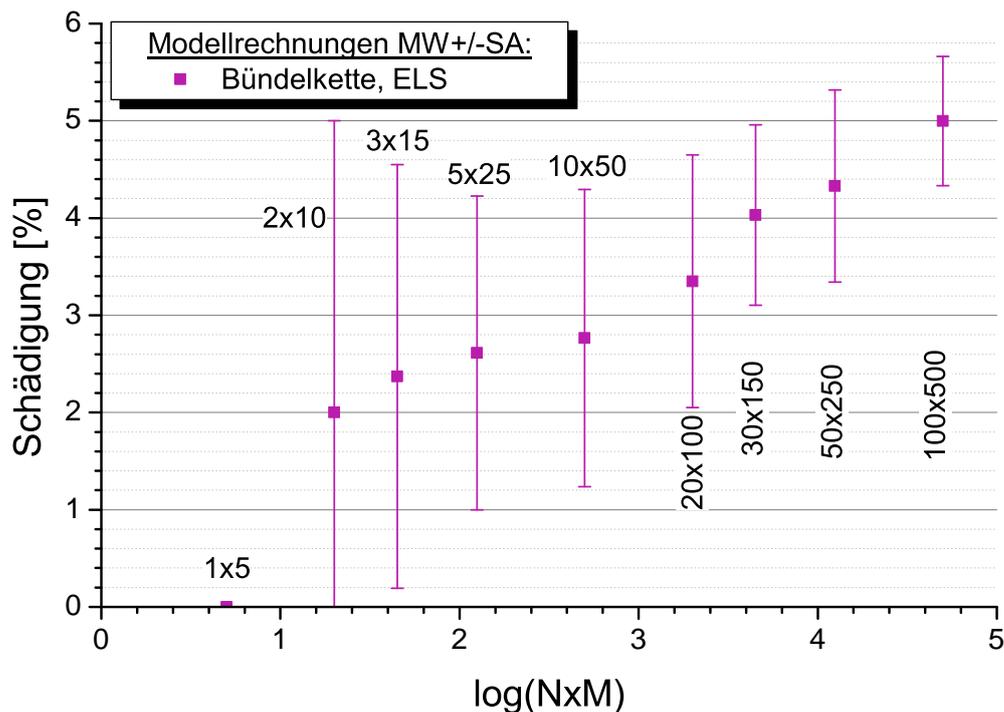


Abbildung 10.38: Mittlere Bündelkettenschädigungen \pm Streuung kleiner Proben. Im Extremfall der reinen Kette kann bei Kraftmaximum noch keine Schädigung eingetreten sein. (S. 88)



Berechnung von 2 Modellproben mit dem Kohäsivmodell und dem gleichen Satz Grenzspannungen. Bei der zweiten Probe wurde die Elementgröße halbiert und zur Erhaltung der Rißenergie, Γ , werden auch die generierten Kohäsivversagenskräfte, f_c , und die Steigung des Kohäsivgesetzes, ψ , halbiert. (S. 95)

Abbildung 10.39: Spannungs- und Schädigungsentwicklung über der Probendehnung

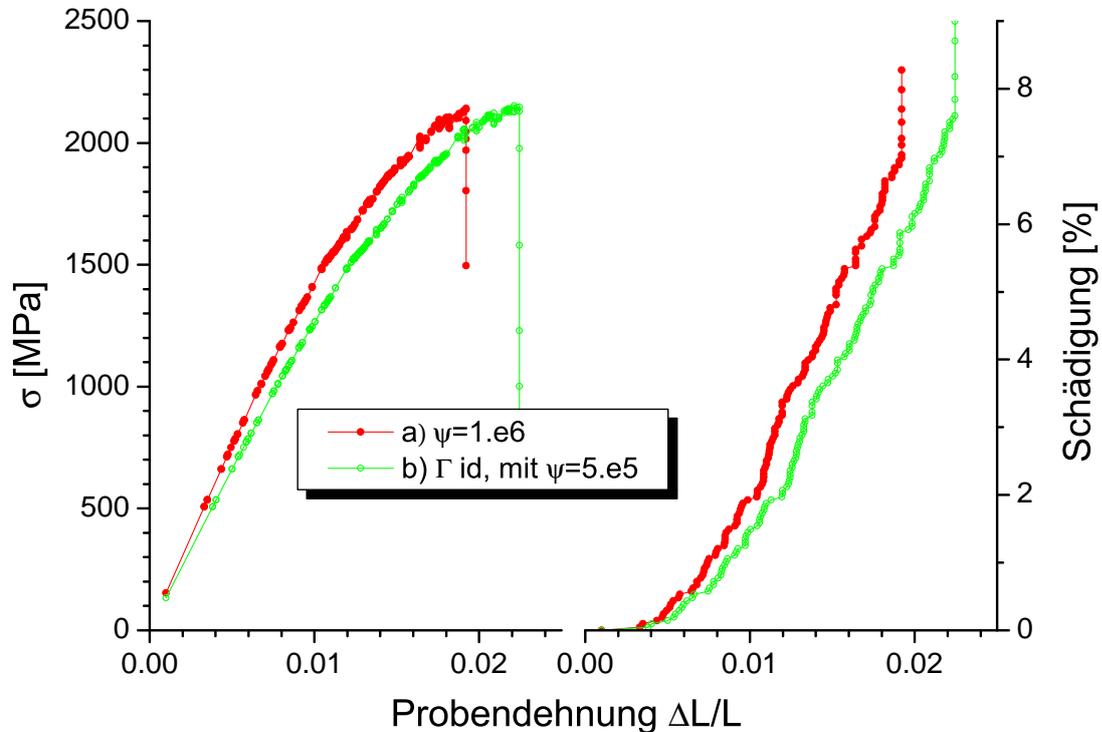
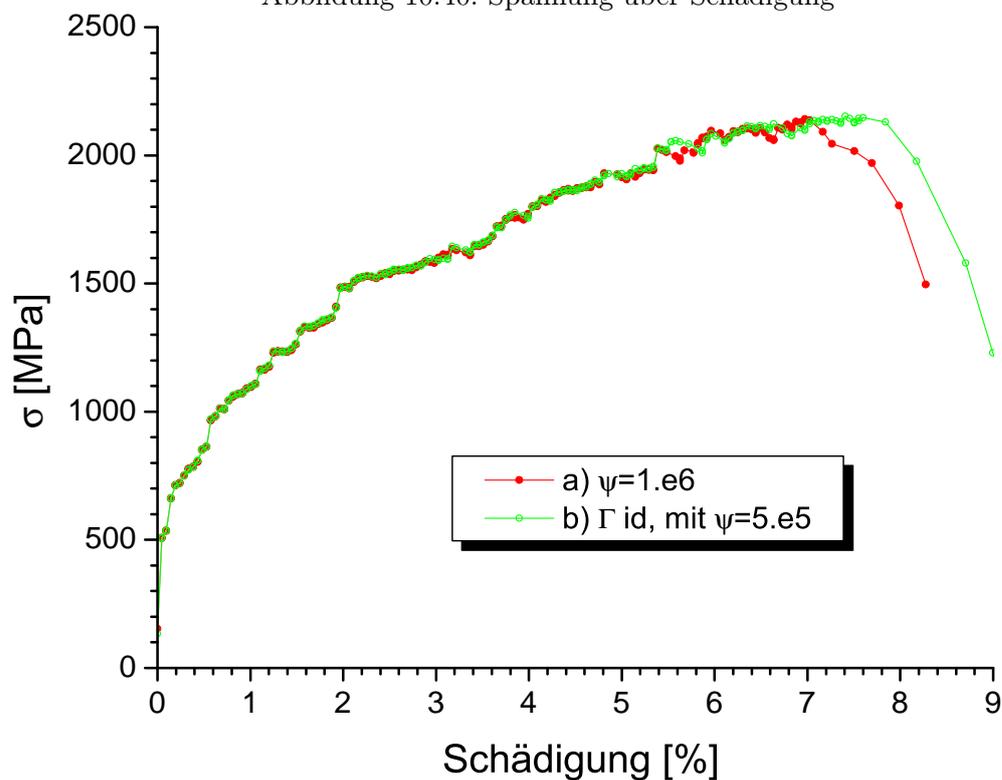


Abbildung 10.40: Spannung über Schädigung



50 Kohäsiv-Modellproben, die jeweils mit den beiden Separationsparametern $\psi=1.e6$ und $\psi=18.e4$ berechnet wurden (siehe Seite 96.)

Abbildung 10.41: Vergleich der Bruchspannungen für jede der 50 Modellproben

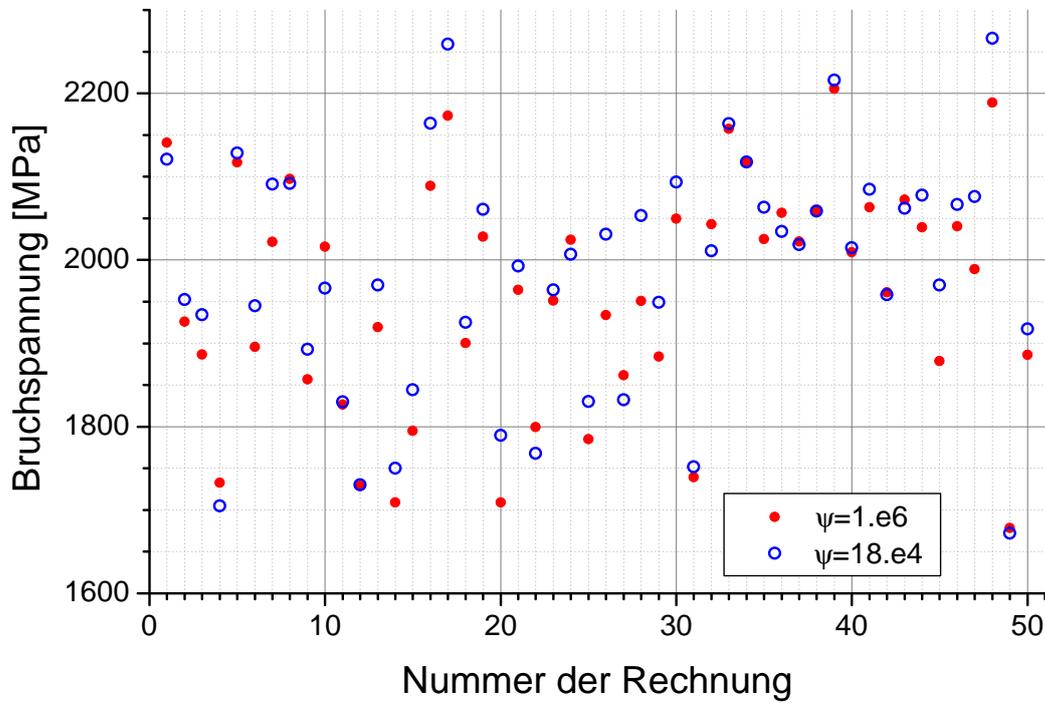


Abbildung 10.42: Vergleich der Bruchschädigungen für jede der 50 Modellproben

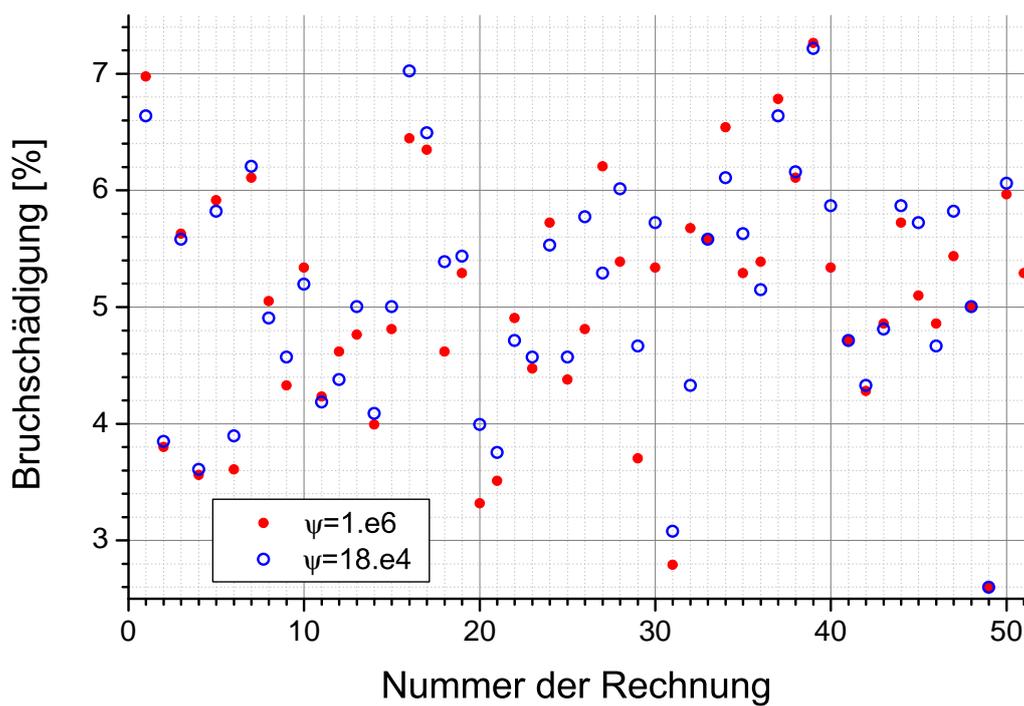


Abbildung 10.43: Verteilung der Bruchspannungen von Kohäsivproben mit unterschiedlicher Separation (s. S. 96.) (Vgl. auch Abbildung 10.41)

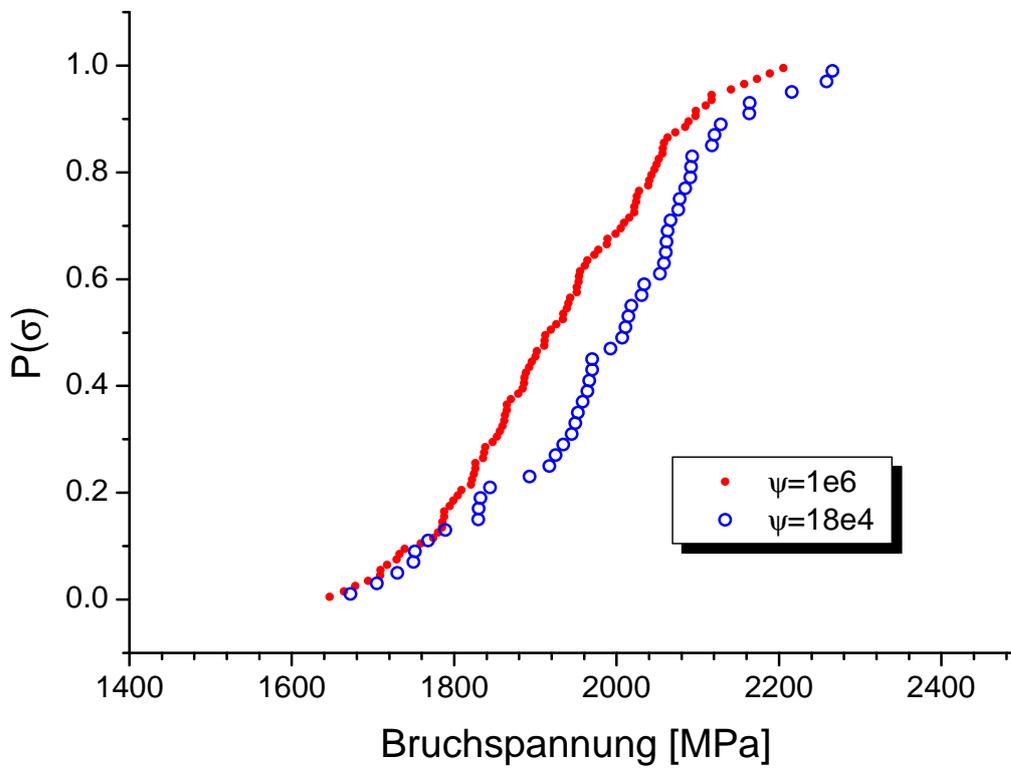


Abbildung 10.44: Verteilung der Bruchschädigungen von Kohäsivproben mit unterschiedlicher Separation (s. S. 96.)

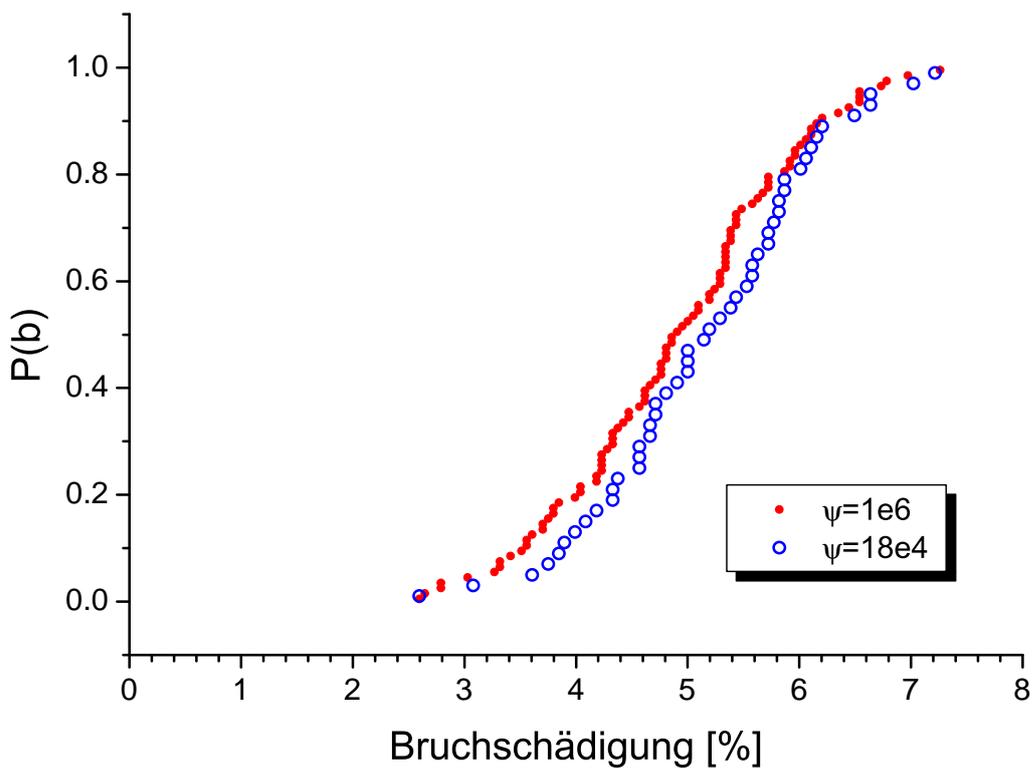


Abbildung 10.45: Spannungsverteilung von 2 Grundverteilungen, $\zeta=5$ und $\zeta=20$, bei Proben konstanten Querschnitts in 2 Größen, 20×100 u. 40×200 , mit dem Kontinuumsmodell. (S. 99)

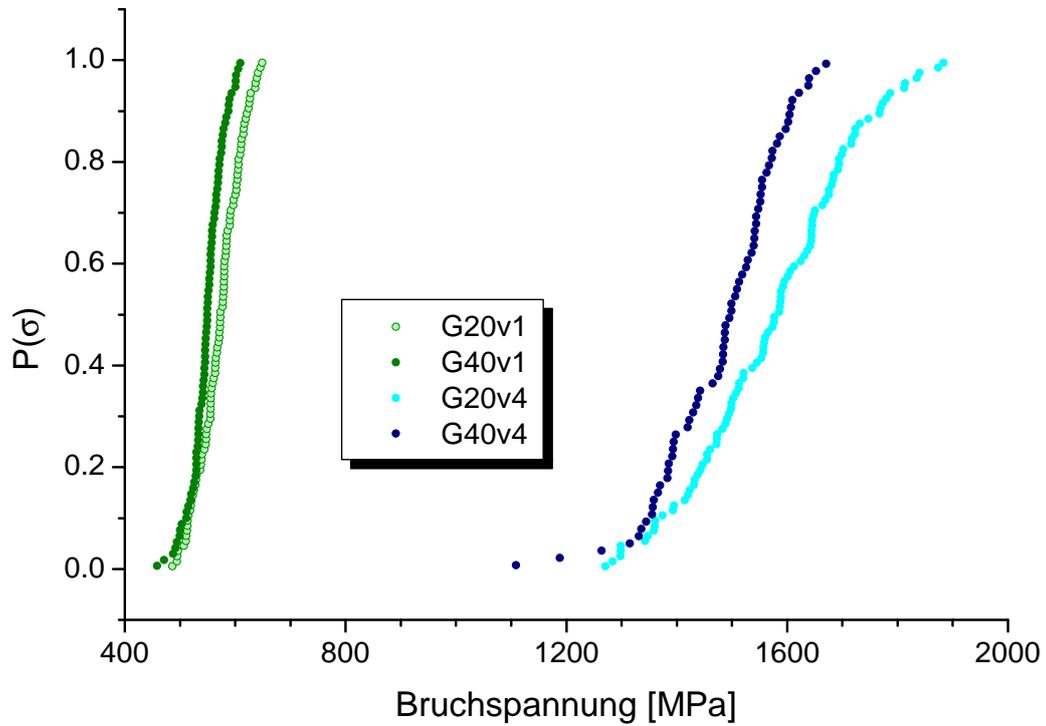


Abbildung 10.46: Schädigungsverteilung von 2 Grundverteilungen, $\zeta=5$ u. $\zeta=20$, bei Proben konstanten Querschnitts in 2 Größen, 20×100 u. 40×200 , mit dem Kontinuumsmodell. (S. 100)

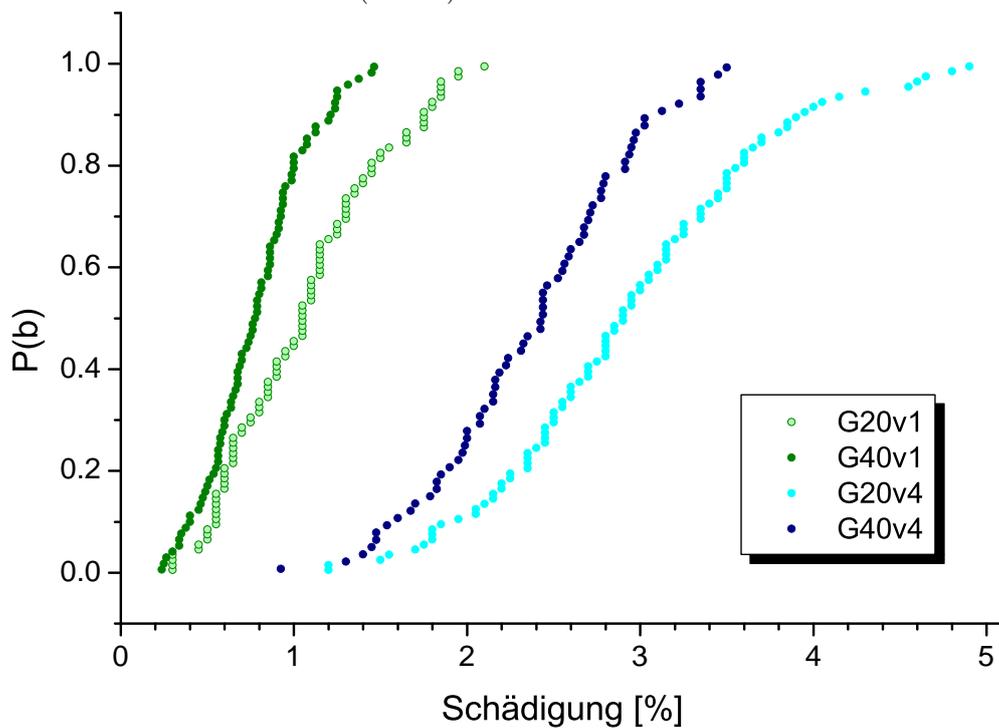


Abbildung 10.47: *weakest-link*-Skalierung $1 - P_{2000}(\sigma) = (1 - P_{2000k}(\sigma))^{1/k}$ der Spannungsverteilung der Proben aus Abbildung 10.45. (S. 100)

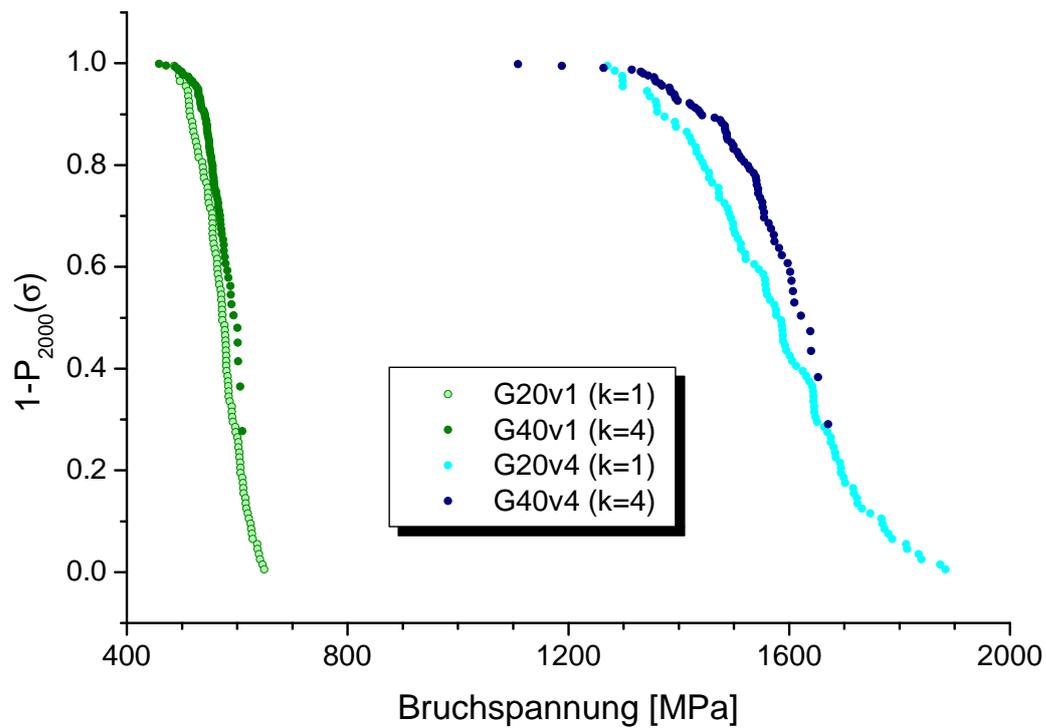


Abbildung 10.48: *weakest-link*-Skalierung $1 - P_{2000}(b) = (1 - P_{2000k}(b))^{1/k}$ der Schädigungsverteilung der Proben aus Abbildung 10.46 (S. 100)

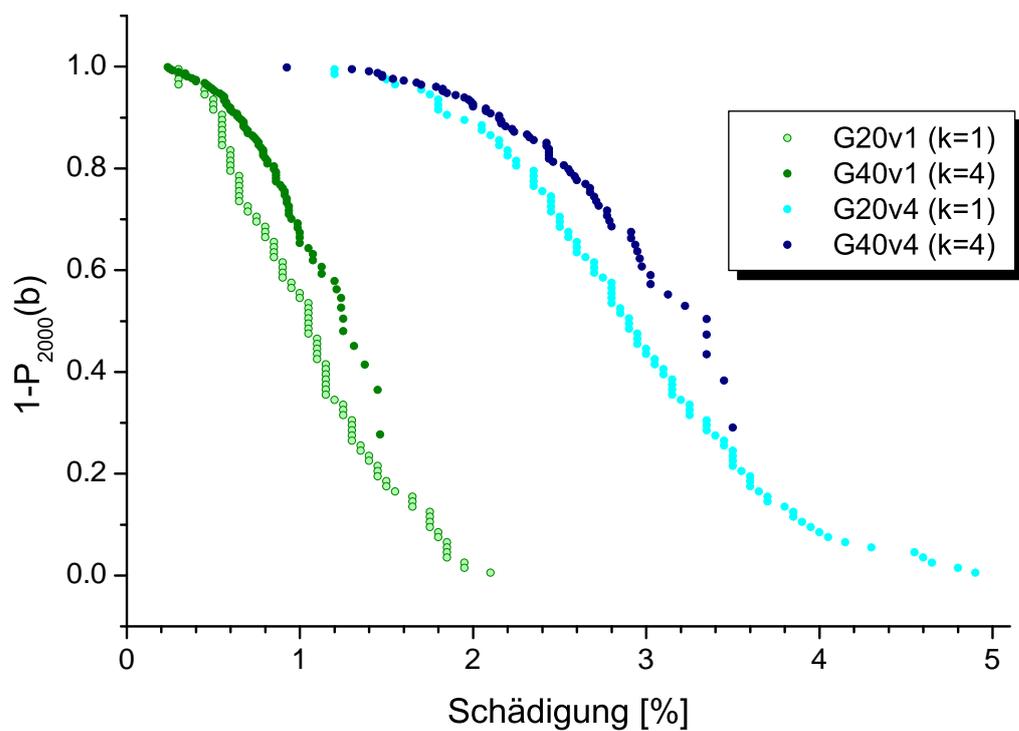


Abbildung 10.49:

Häufigkeitsverteilung der Bruchspannungen von 100 nominell gleichen Modellproben mit $\zeta=20$ für das FE-Modell mit Kohäsivelementen (a) bei $\psi=1.e6$ und das Modell mit bruchfähigen Kontinuumsselementen (b-d). Die 100 generierten Datensätze für das Kontinuumsmodell wurden jeweils 3 mal mit unterschiedlicher Gewichtung der Integrationspunktspannungen berechnet: Versagen bei Überschreiten der Grenzspannung b) in einem GP, c) im Elementmittel der Spannungen, d) in allen 4 GP. (S. 104)

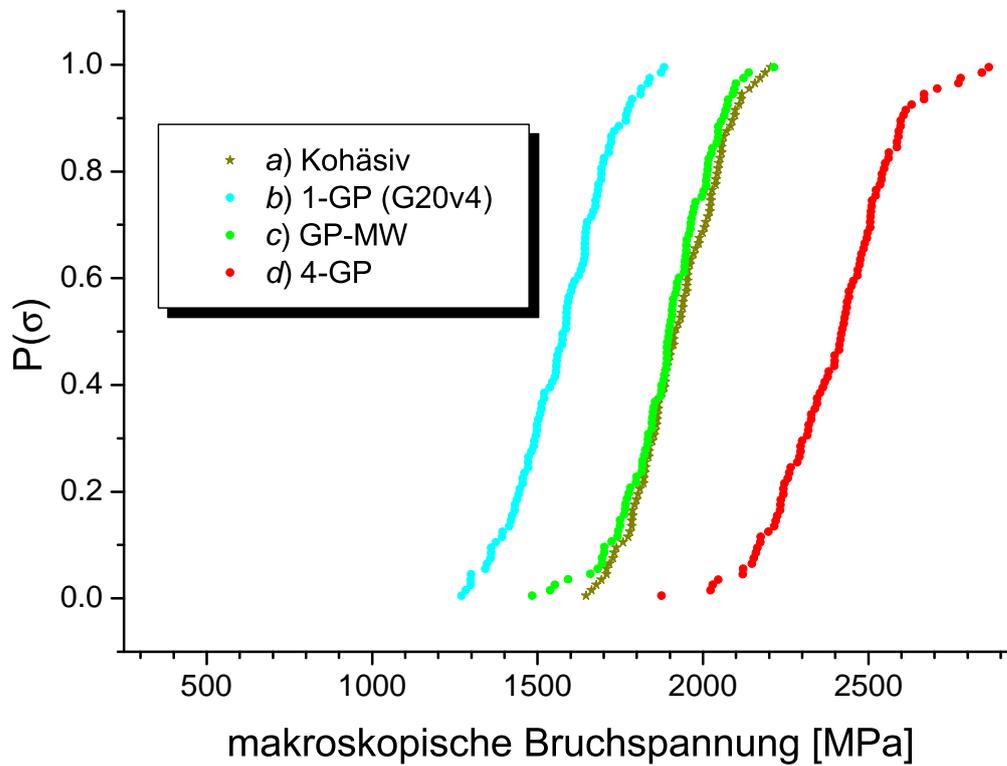


Abbildung 10.50: Häufigkeitsverteilung der Schädigungen des Beispiels oben. (S. 104)

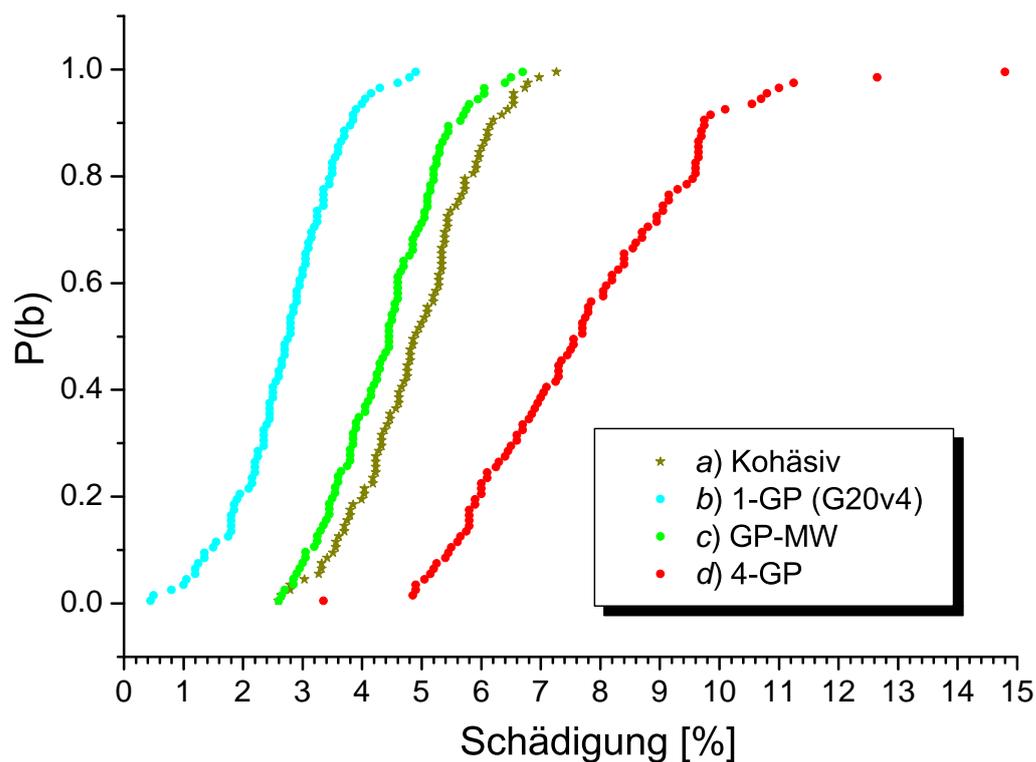


Abbildung 10.51: Spannungsentwicklung der 4 Rechnungen aus Tabelle 6.4 über der Verlängerung des Kontinuumsanteils, ΔL_{Kont} ($= M\varepsilon_{yy}$ nach Gl. (6.3) beim Kohäsivmodell). Die Proben *a-c* zum Zeitpunkt ihres Versagens sind in Abbildung 10.53 gezeigt. (S. 103)

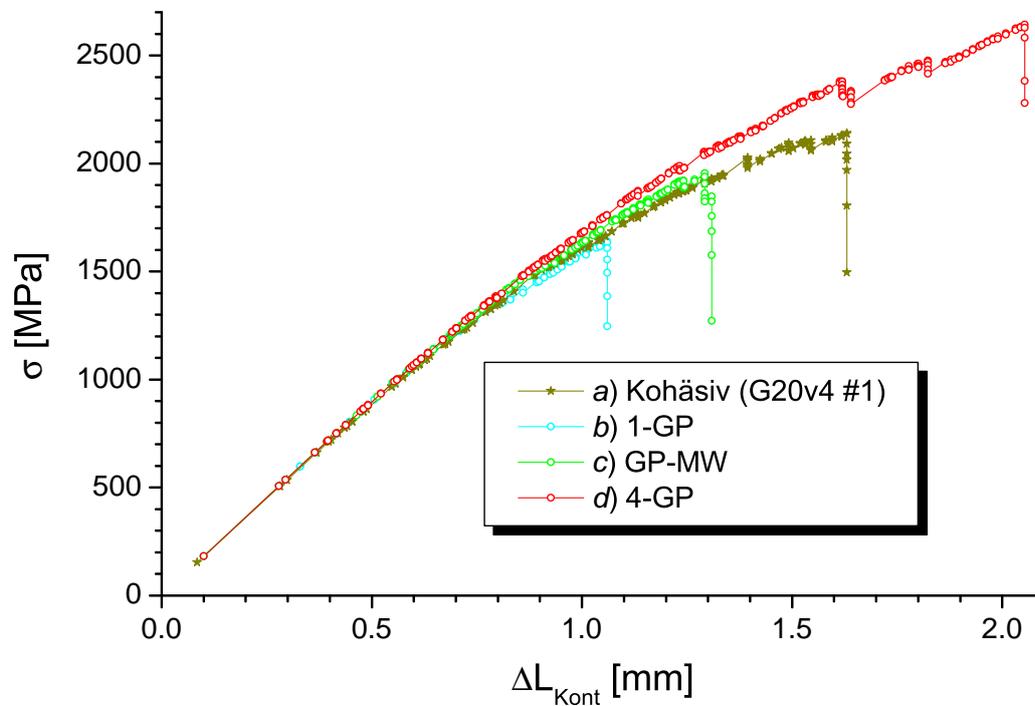


Abbildung 10.52: Spannungsentwicklung über Schädigung $b = 100N_b/(NM)$ [%] der Proben der oberen Abbildung. Bei der Kohäsivprobe wurde zur Schädigungsbestimmung NM gleich der Anzahl der Kohäsivelemente gesetzt. (S. 103)

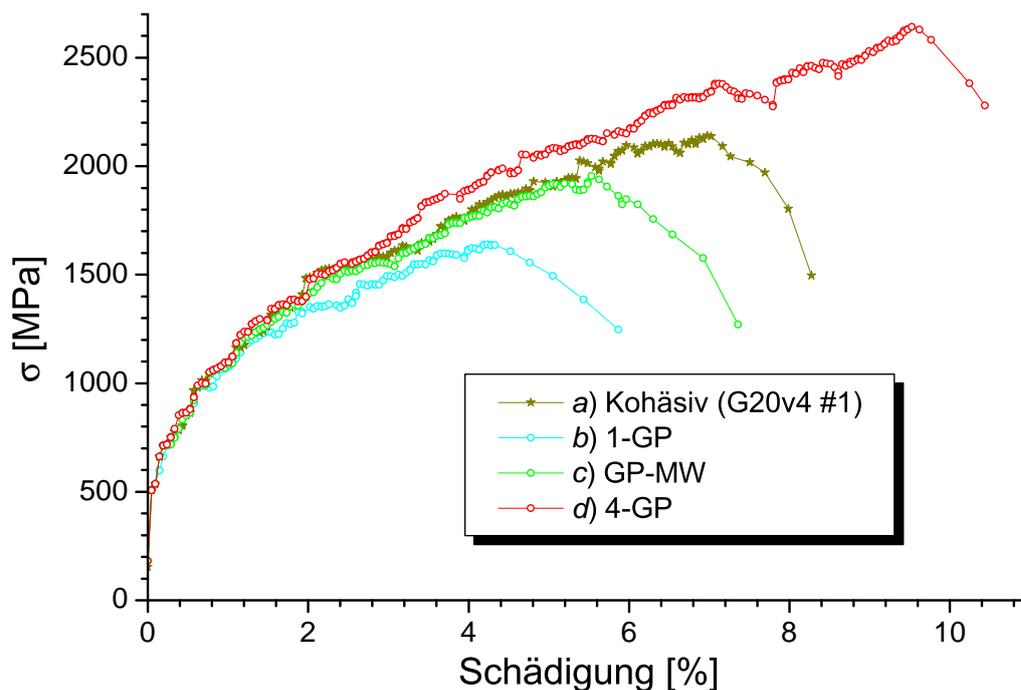


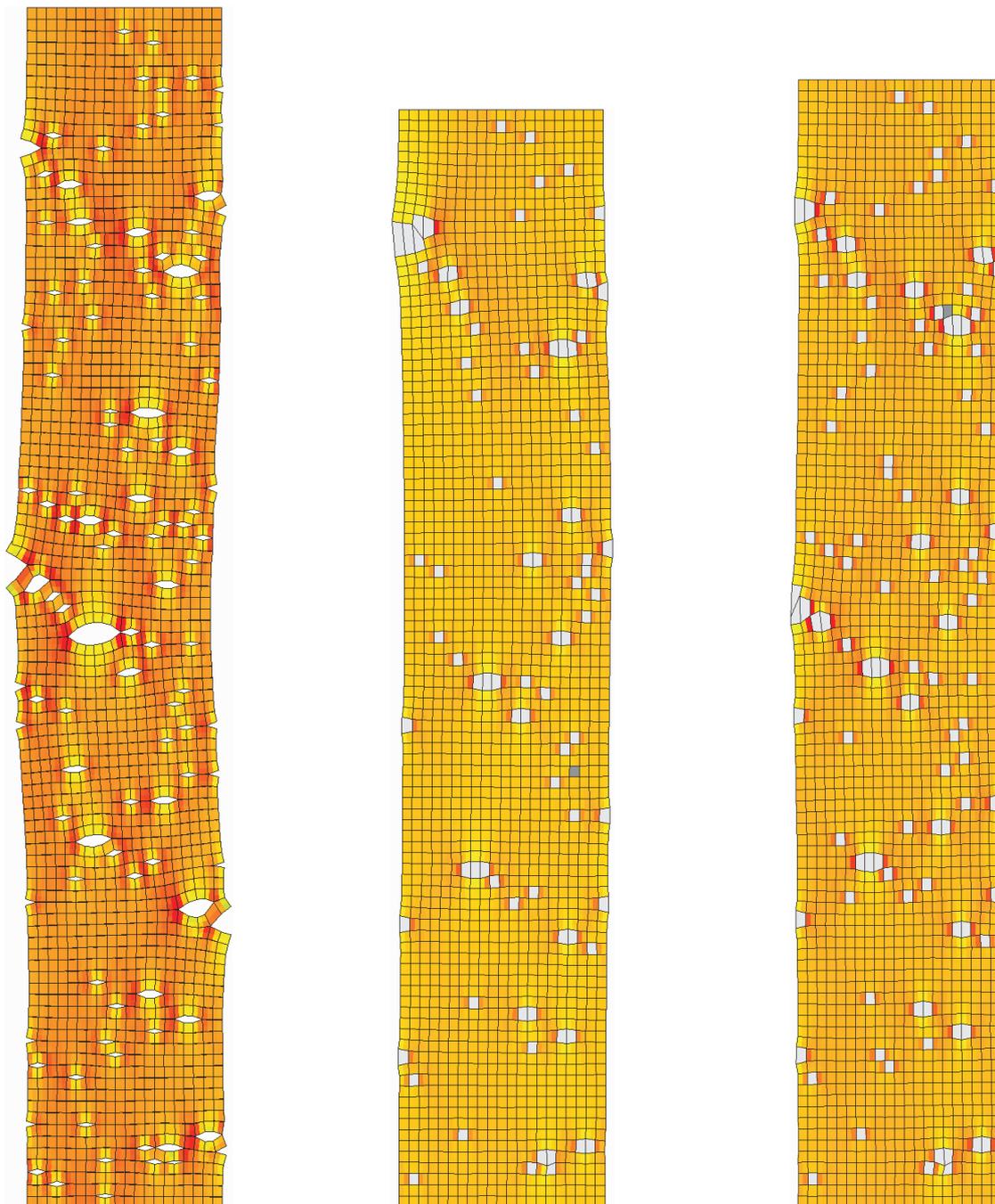
Abbildung 10.53: FE-Modellproben bei F_{max} ; alle 3 Proben erhielten die gleichen 21×99 Bruchfestigkeitswerte f_c bzw. σ_c (s. S. 103). Die Verschiebungen sind einheitlich mit dem Faktor 10 skaliert.

a) Kohäsivmodell mit 20×100 Kontinuums- u. 21×99 Kohäsivelementen

b und c: Modell mit 21×99 bruchfähigen Kontinuums- elementen; Bruchkriterium: Element bricht, wenn

b) σ an 1 GP $\geq \sigma_c$

c) σ -MW aller GP $\geq \sigma_c$



LEGENDE:

Kontinuums- elemente

σ_{yy} [N/mm²]:



zuvor gebrochene Elemente



Elemente, die in diesem Inkrement brechen

Abbildung 10.54: Häufigkeitsverteilung der Bruchspannungen von 30 nominell gleichen Modellproben mit $\zeta=2$ für das Kohäsivmodell ($\psi=1.e6$) und das Kontinuumsmodell bei 2 GP-Versagenskriterien. (S. 104)

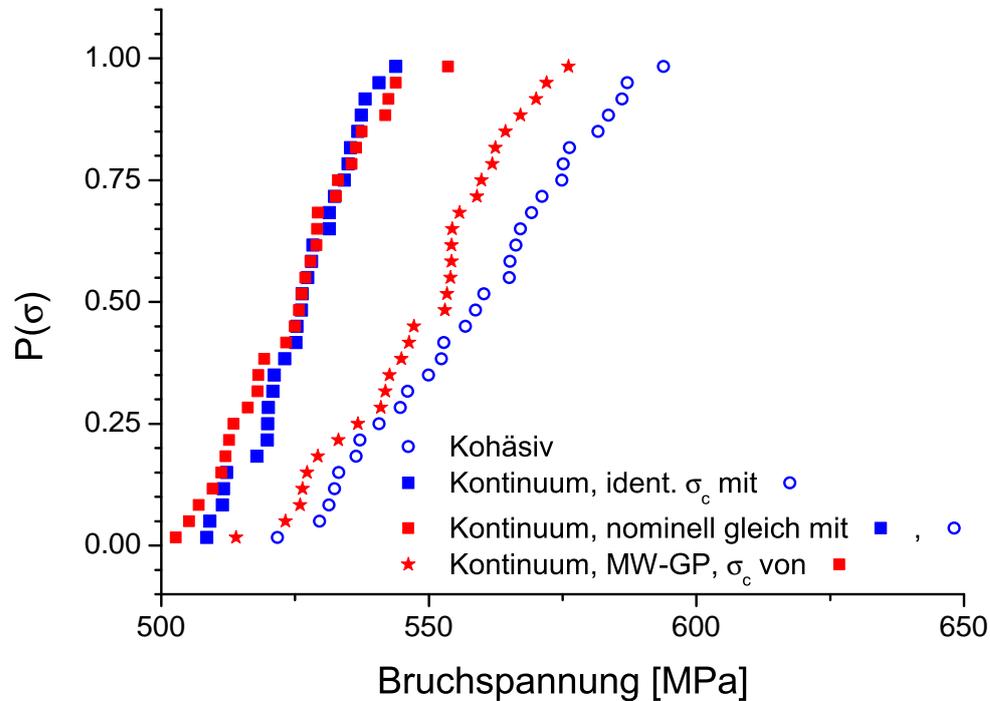


Abbildung 10.55: Häufigkeitsverteilung der Schädigungen des Beispiels oben. (S. 104)

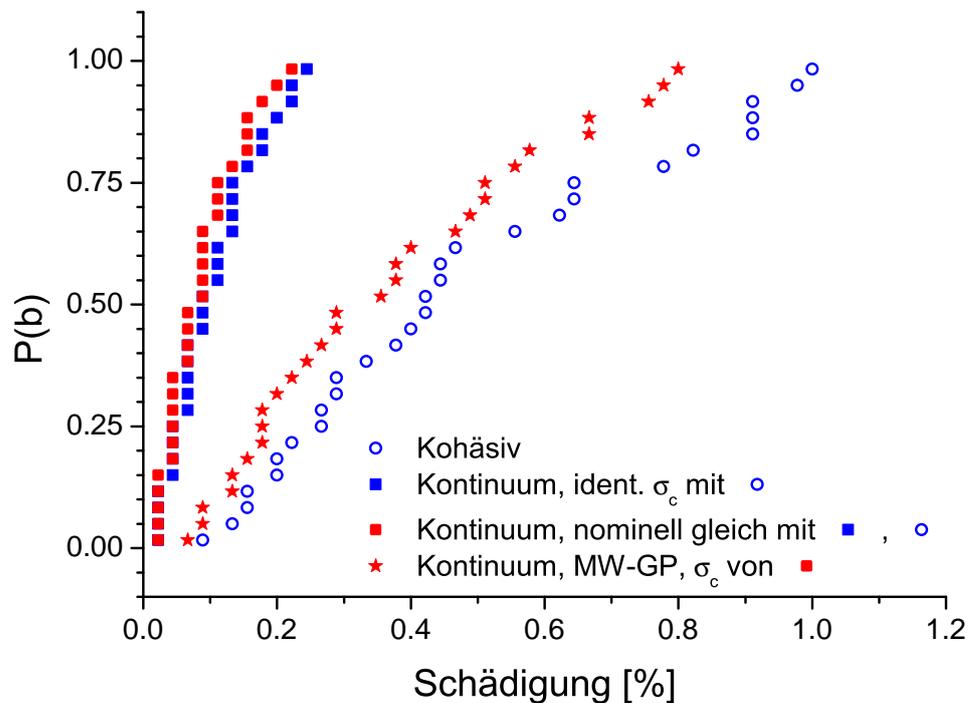


Abbildung 10.56: Bruchspannungsverteilungen, $P(\sigma)$, aller taillierten Proben. (Für die Probenbezeichnungen siehe Tabelle 6.5.) (S. 109)

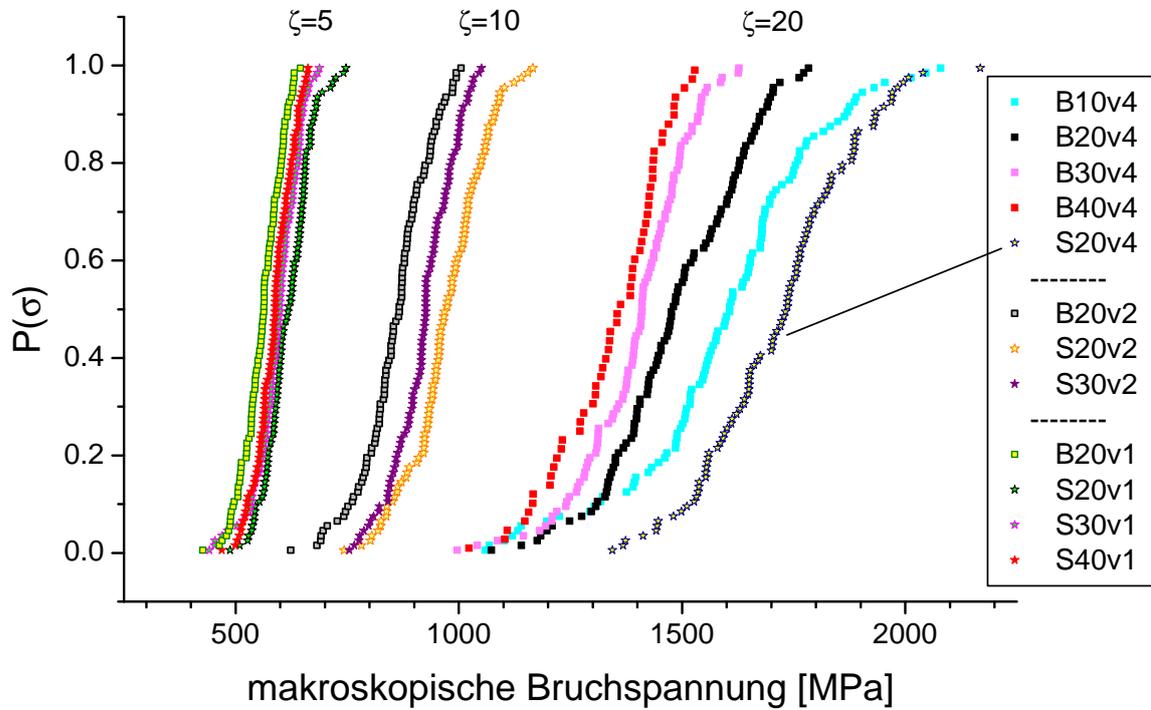


Abbildung 10.57: *weakest-link*-Skalierung der Bruchspannungen, $(1 - P_{2000k}(\sigma))^{1/k}$, vergleichbarer taillierter Proben (S. 109).

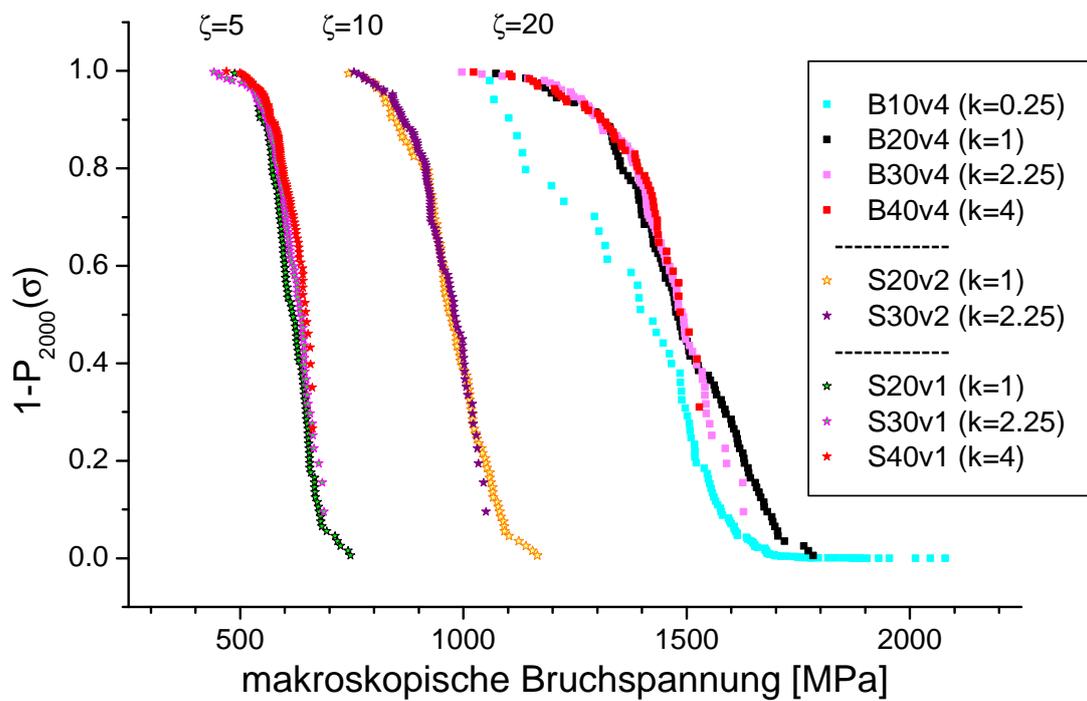


Abbildung 10.58: Vergleich der *weakest-link*-skalierten Bruchspannungen, $(1 - P_{2000k}(\sigma))^{1/k}$, von Modellproben mit unterschiedlichem Breitenverhältnis κ . (S. 110)

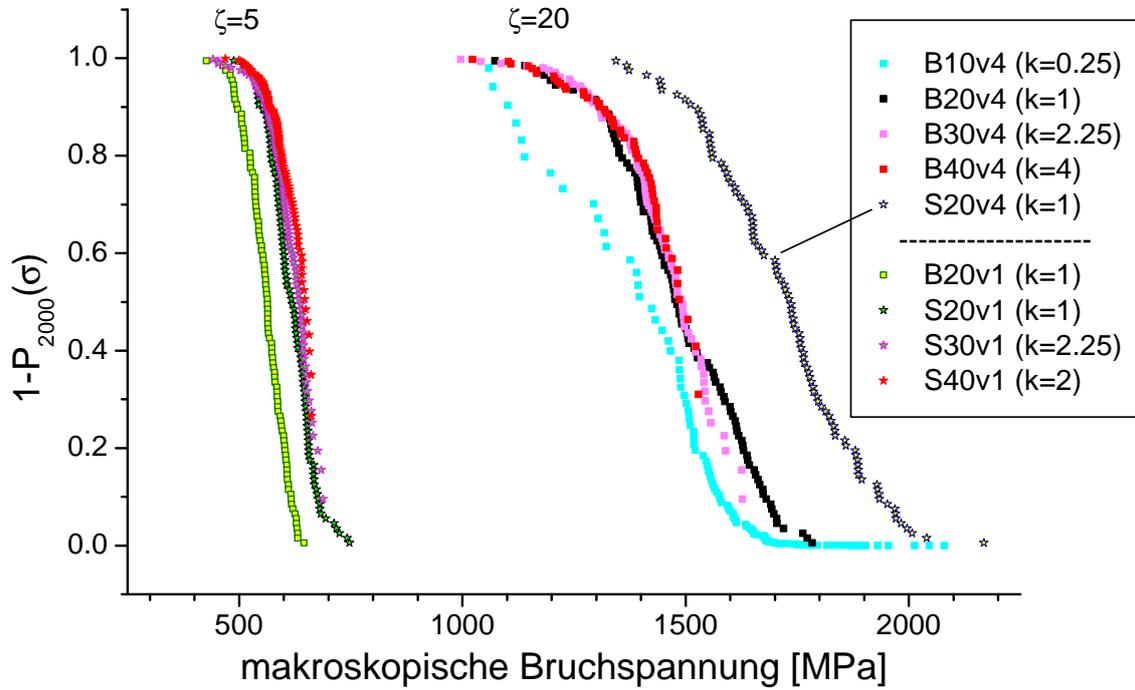


Abbildung 10.59: Zusammenhang zwischen geschädigtem Probenflächenanteil (von der Gesamtprobenfläche) und geschädigtem Elementanteil (von der Anzahl Elemente) bei taillierten Modellproben bei F_{max} . (S. 110)

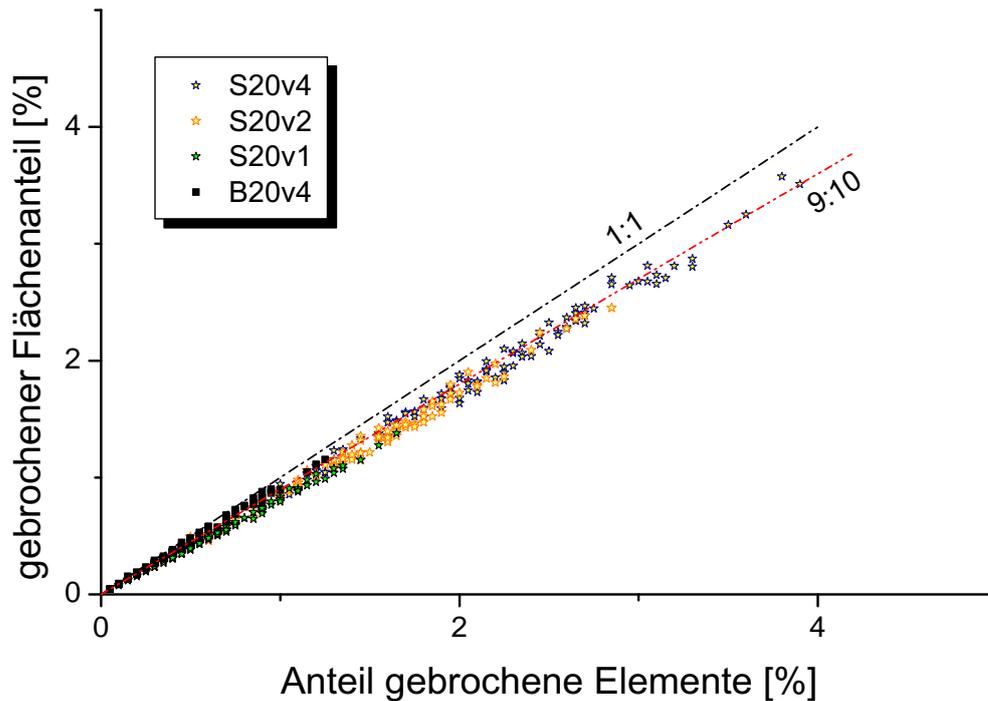


Abbildung 10.60: Schädigungsverteilung, $P(b)$, aller taillierten Proben. (Für die Probenbezeichnungen siehe Tabelle 6.5.) (S. 112)

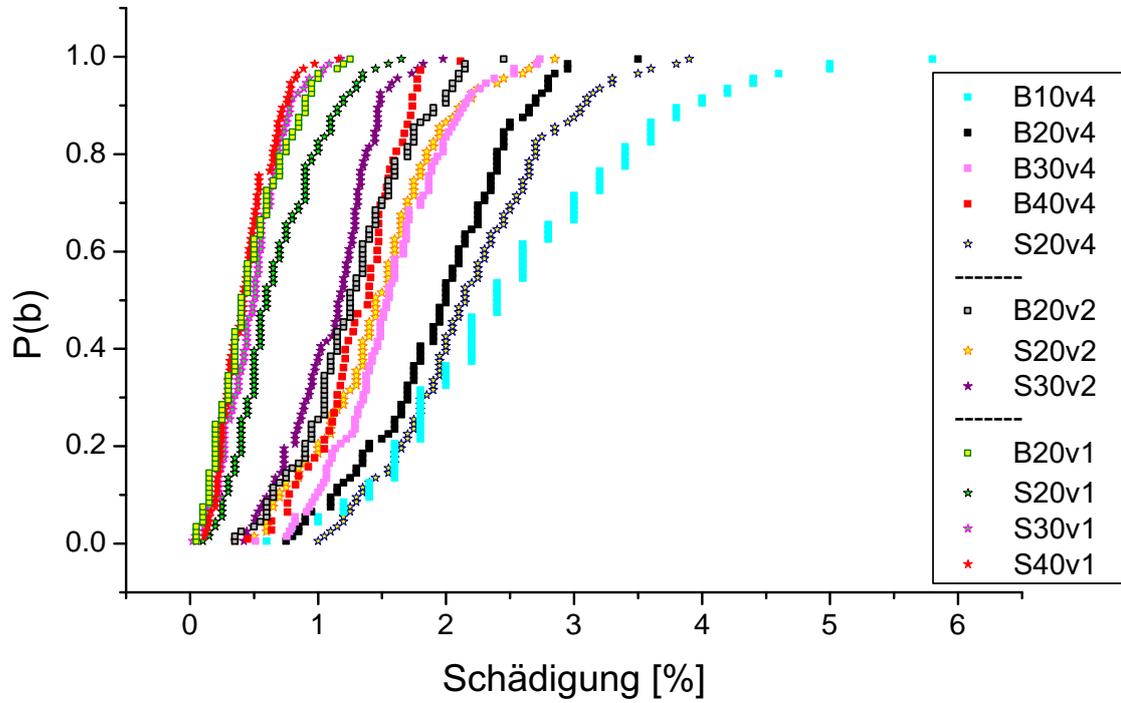


Abbildung 10.61: Schädigungsverteilung bei geringer gekerbten Modellproben, $\kappa=1.5$. (S. 112)

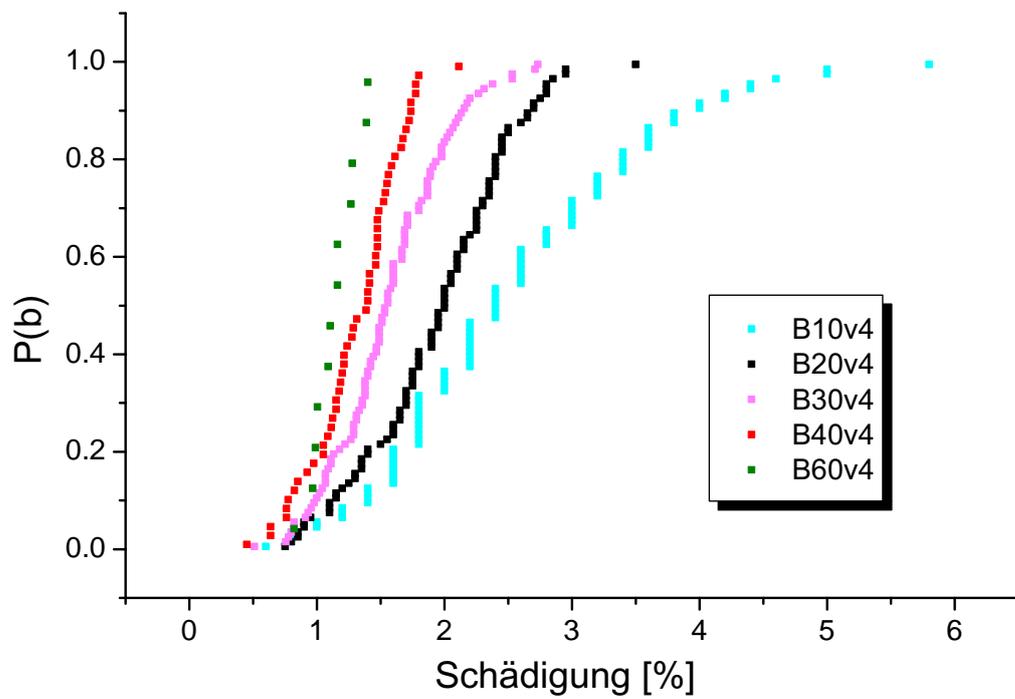


Abbildung 10.62: *weakest-link*-Skalierung der Bruchspannungen, $(1 - P_{2000k}(b))^{1/k}$, vergleichbarer taillierter Proben (S. 112)

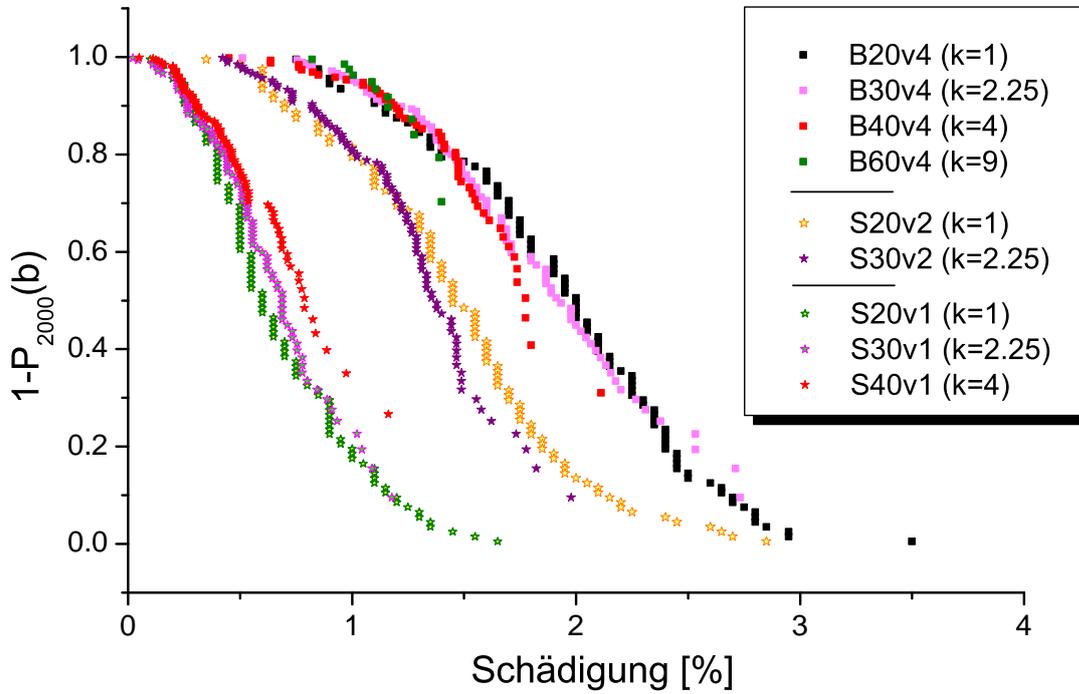


Abbildung 10.63: Vergleich der *weakest-link*-skalierten Bruchschädigungen, $(1 - P_{2000k}(b))^{1/k}$, von Modellproben mit unterschiedlicher Grundverteilung ζ . (S. 112)

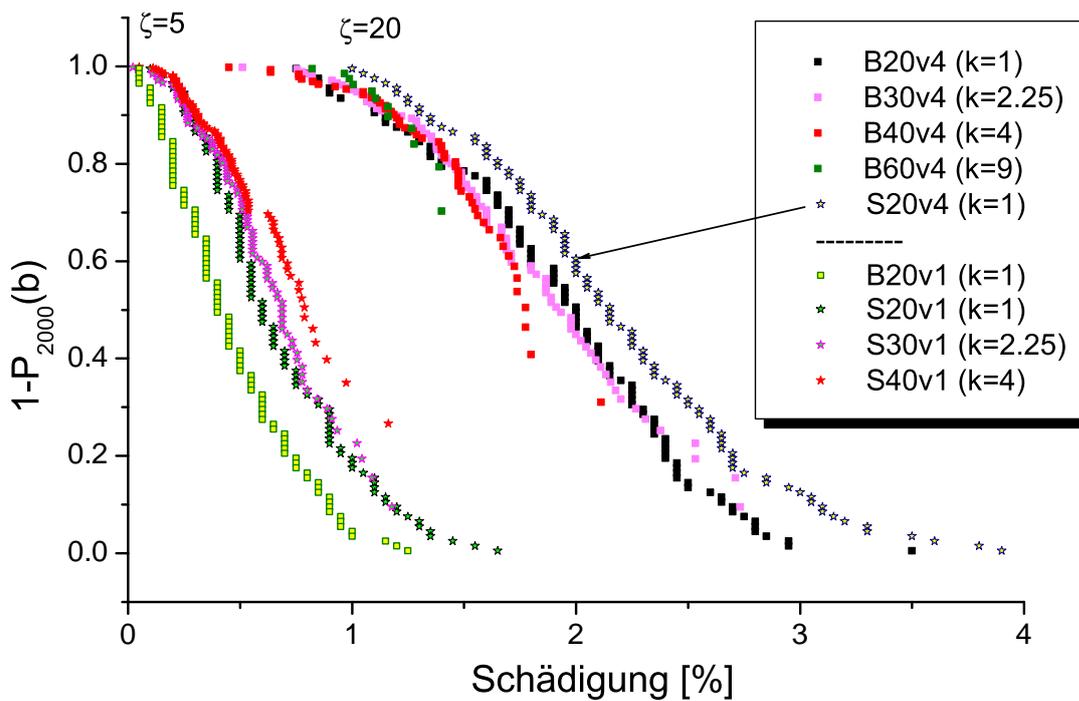


Abbildung 10.64: mittlerer Schädigungsabstand einiger Modellproben. (S. 113)

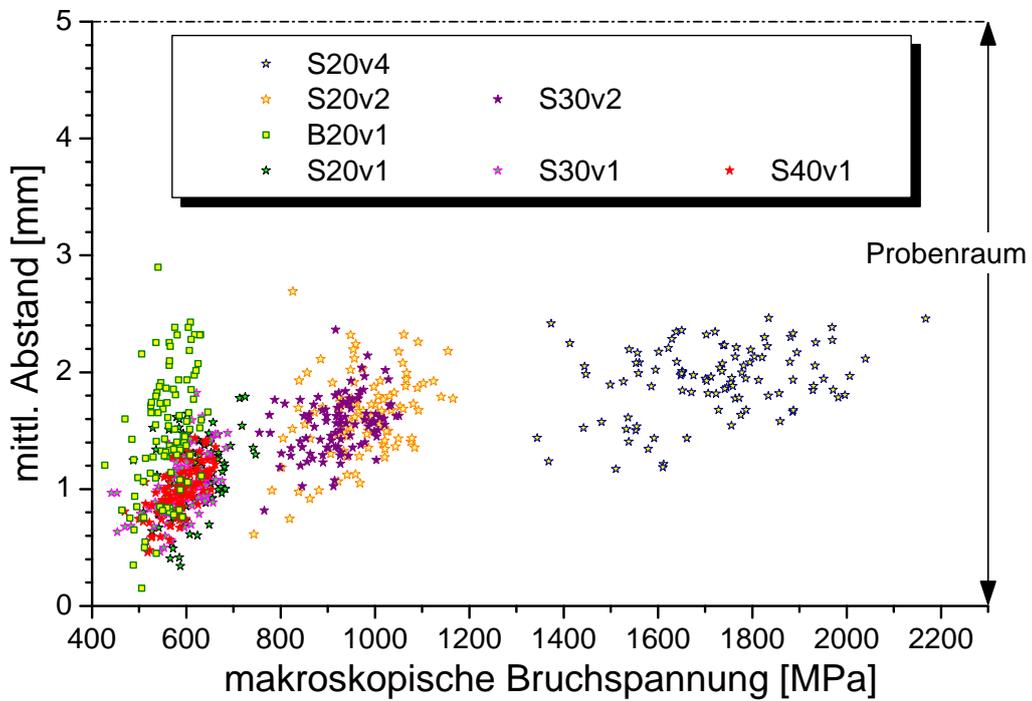
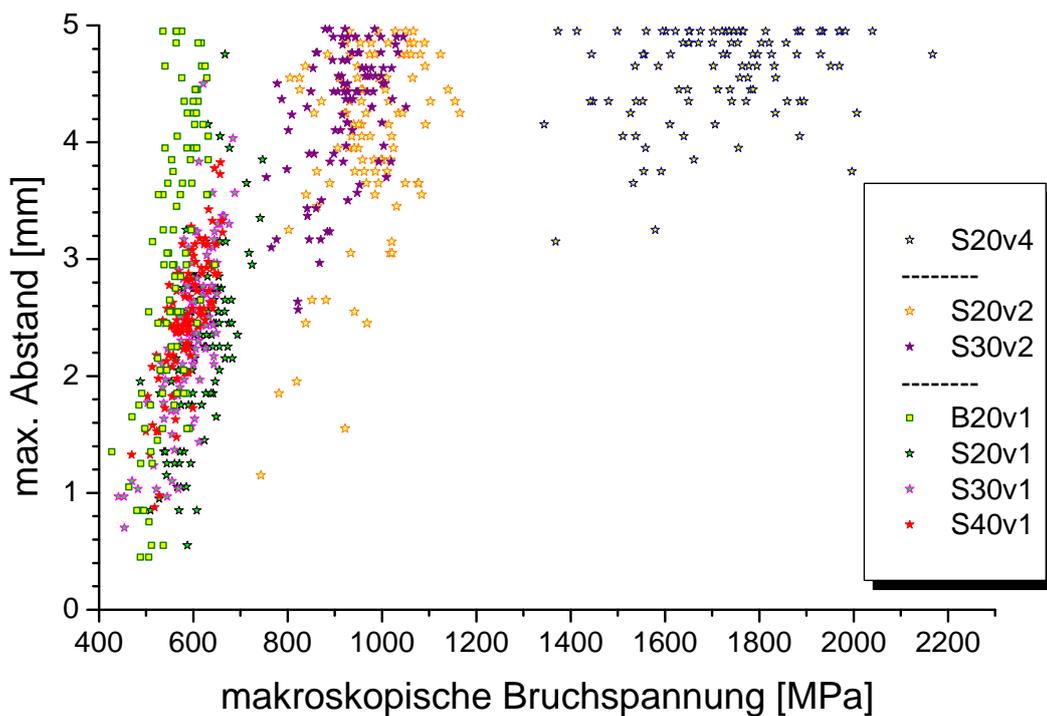
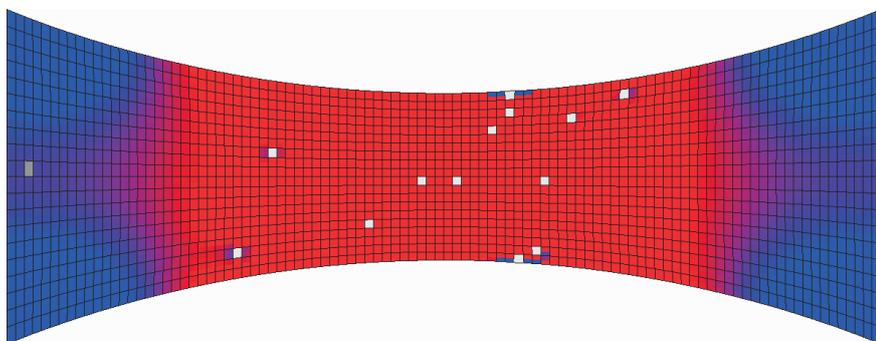


Abbildung 10.65: maximaler Schädigungsabstand einiger Modellproben. (S. 113)

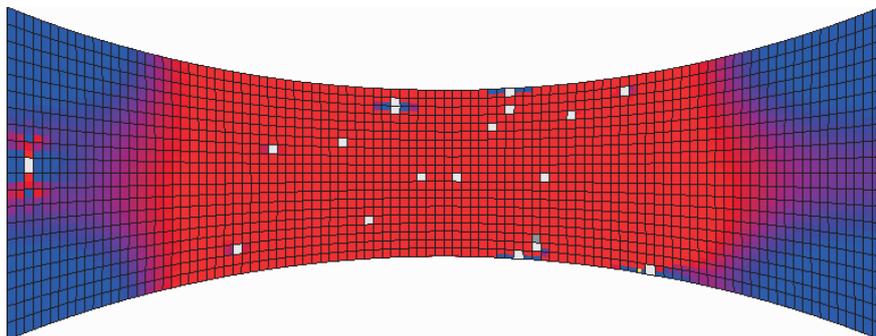


links:

Abbildung 10.66:
Bruch des kerbfernsten Elements der Modellprobe S20v1 #64. Das mittlere Element oben mit seiner geringen Festigkeit von 428 MPa bricht infolge der relativ hohen lokalen Spannung in Probenmitte.
Wie rechts zu sehen ist, werden die umliegenden Elemente nach Ausfall des Elements deutlich höher belastet. (S. 114)



Inkrement 27

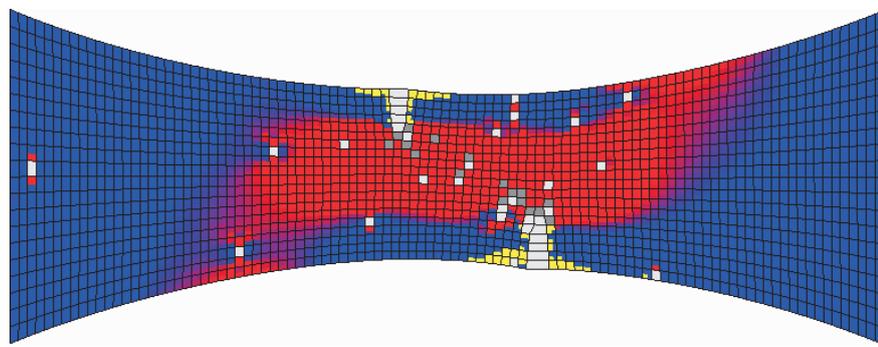


Inkrement 35: F_{\max}

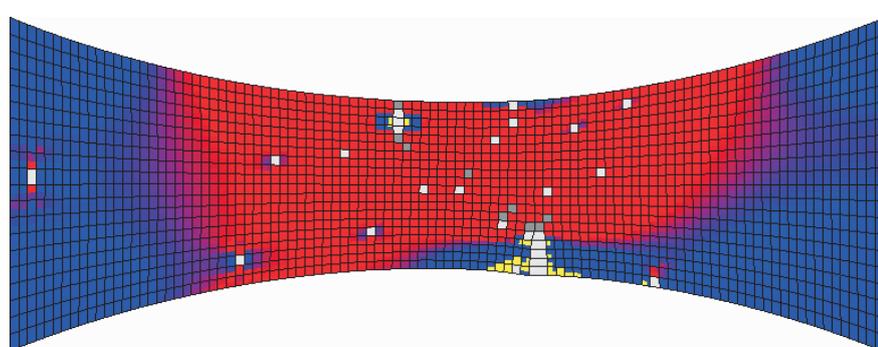
rechts und nächste Seite:

Abbildung 10.67:
Kraftmaximum und makroskopischer Bruch der Modellprobe S20v1 #64, Aufgrund der Schädigung der Probe ist in Inkrement 35 das Kraftmaximum erreicht. Ohne weitere Verschiebungssteigerung (vgl. auch Abbildung 10.12 auf S. 141) setzt kaskadenartig anwachsende Schädigung ein, die zum makroskopischen Bruch führt. Nach 4 Inkrementen mit inneren Belastungsumlagerungen gefolgt von weiteren Elementbrüchen be trägt die Randlast in Inkrement 39 weniger als 80% ihres Maximalwerts und die Rechnung wird abgebrochen. (S. 114)

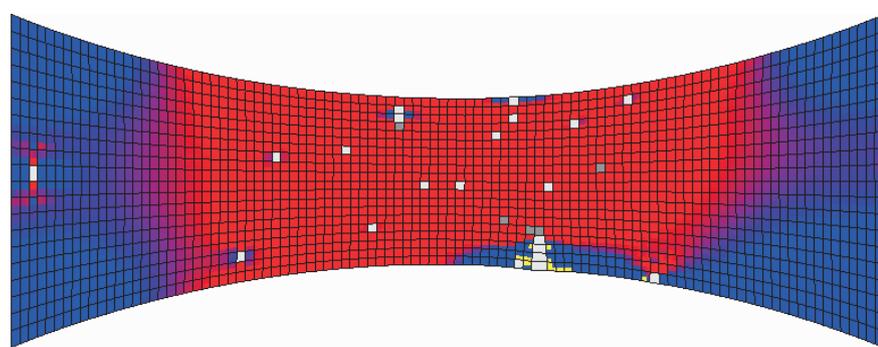
Inkrement 39: $0.8 F_{\max}$:
Abbruch der Rechnung



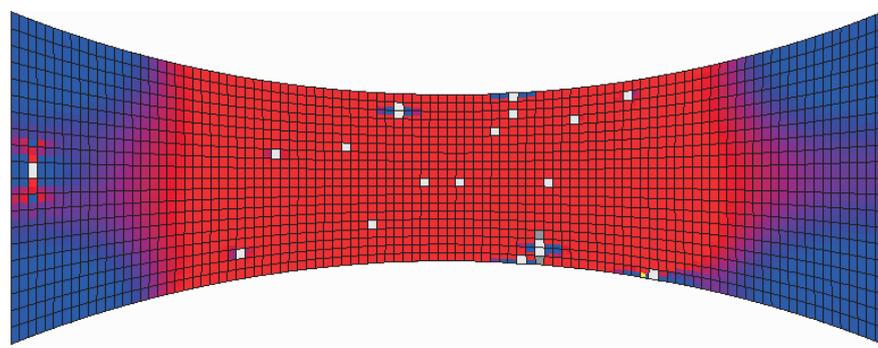
Inkrement 38



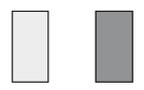
Inkrement 37



Inkrement 36



bereits zuvor gebrochene Elemente
 Elemente, die bei dieser Last brechen, aber erst im folgenden Schritt berücksichtigt werden



 ≥ 500

 500

 ...

 400

 0-400

 ≤ 0

LEGENDE:

σ_{yy} [N/mm²]:

Abbildung 10.68: Vergleich der Bruchspannungsverteilungen taillierter und nichttaillierter Modellproben. (S. 116)

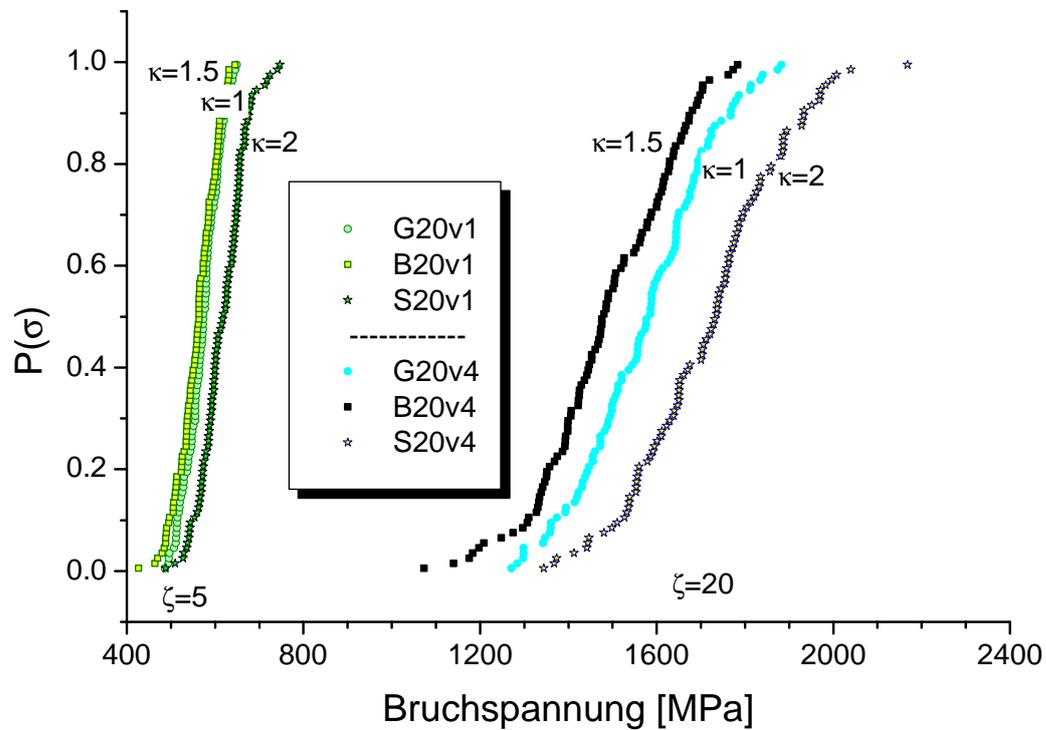


Abbildung 10.69: Vergleich der Bruchschädigungsverteilungen taillierter und nichttaillierter Modellproben. (S. 116).

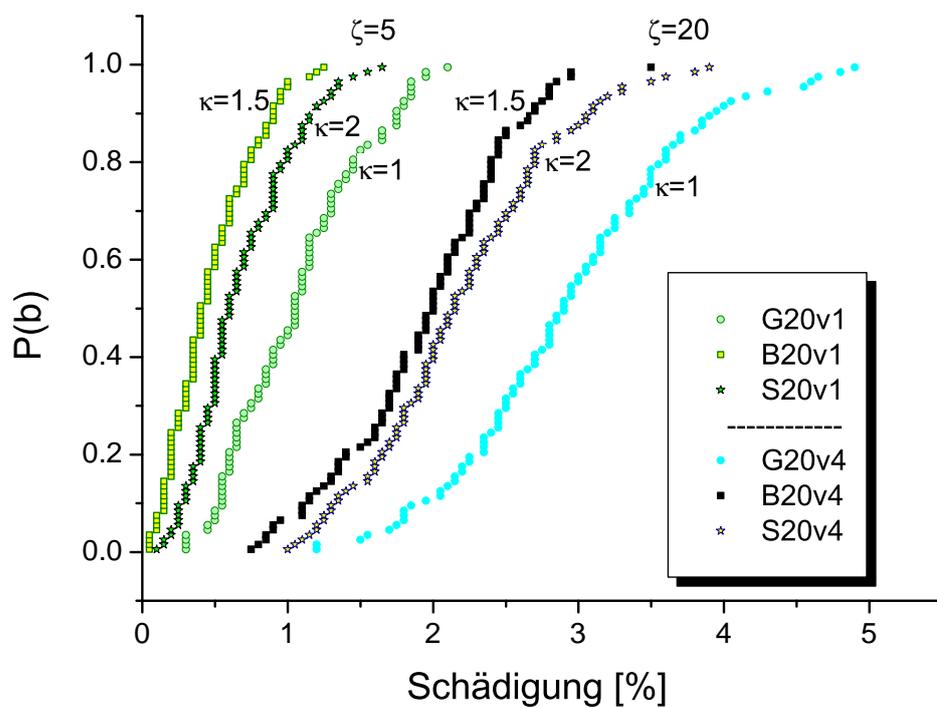


Abbildung 10.70: Last-Schädigungskurven für Rechnungen verschiedener Modelle mit dem gleichen Satz für die 21×99 Versagensgrenzwerte. (S. 119)

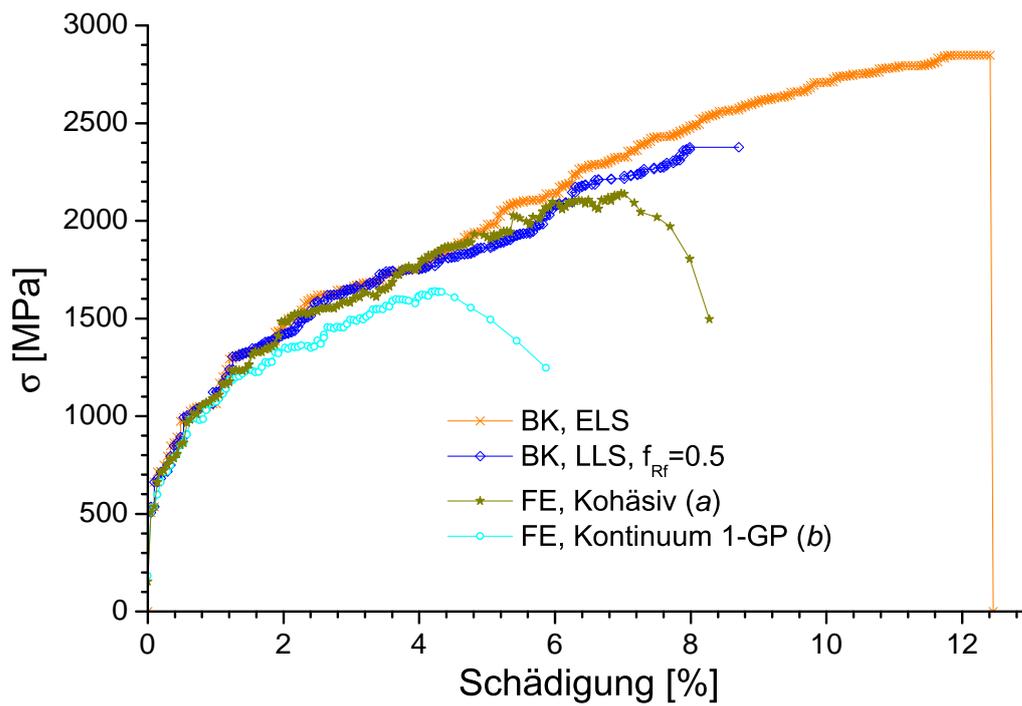


Abbildung 10.71: Einfluß der Probengröße auf Spannungsmittelwert und Streuung beim Bündelkettenmodell mit ELS-Regel und FE-Kohäsivmodell im Vergleich. (S. 120)

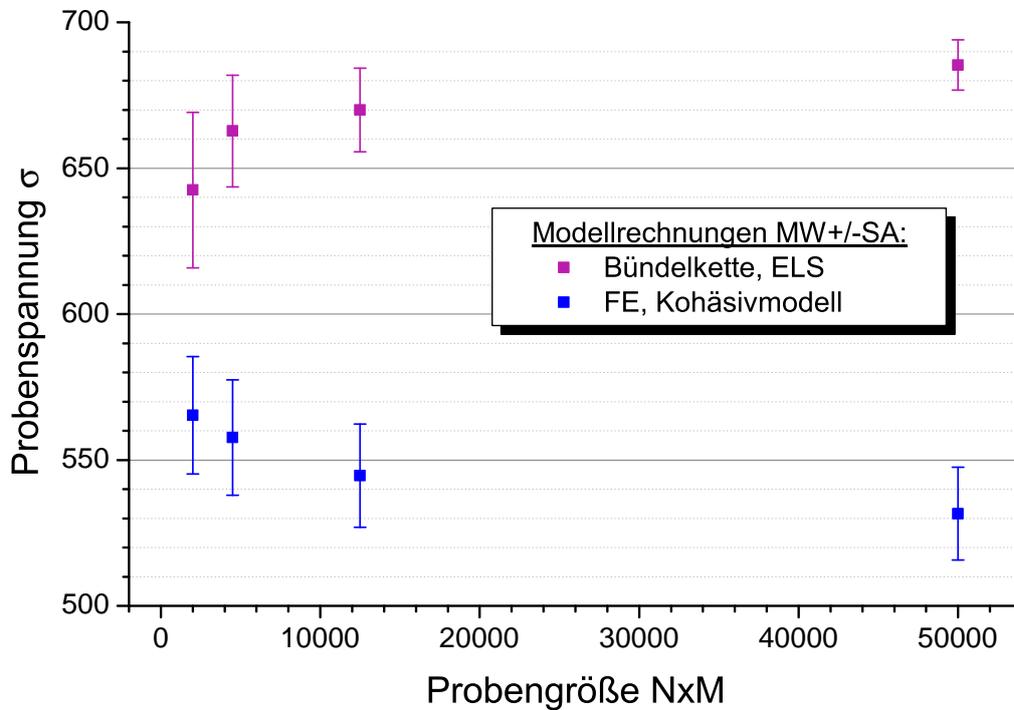


Abbildung 10.72: Einfluß der Probengröße auf Schädigungsmittelwert und Streuung beim Bündelkettenmodell mit ELS-Regel und FE-Kohäsivmodell im Vergleich. (S. 120)

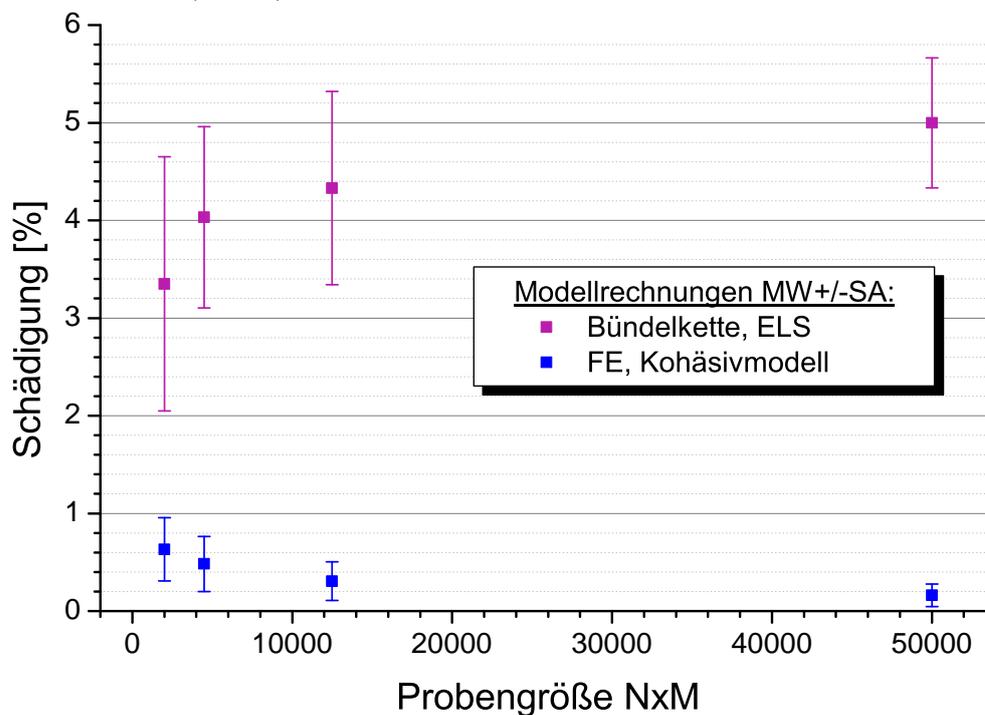


Abbildung 10.73: Verteilung der Bruchspannungen bei verschiedenen Modellen in je 2 Größen. (S. 121)

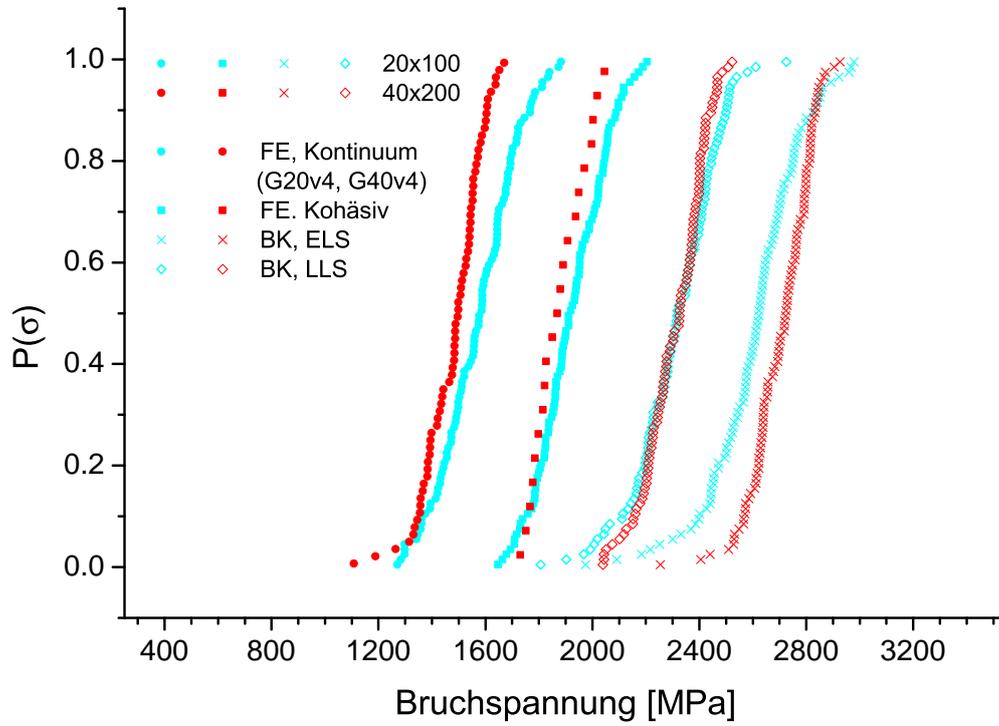


Abbildung 10.74: Verteilung der Bruchschädigungen bei verschiedenen Modellen in je 2 Größen. (S. 121)

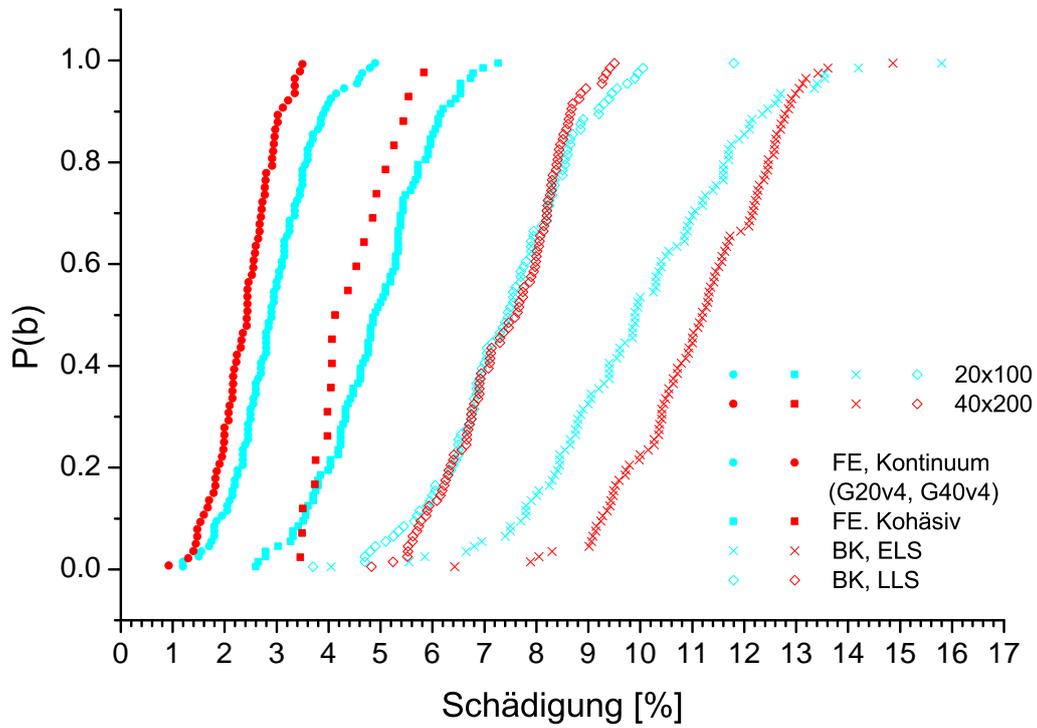


Abbildung 10.75: Verteilung der Bruchspannungen bei FE und BK bei 2 Verteilungsbreiten (vgl. Tabelle 7.1). (S. 123)

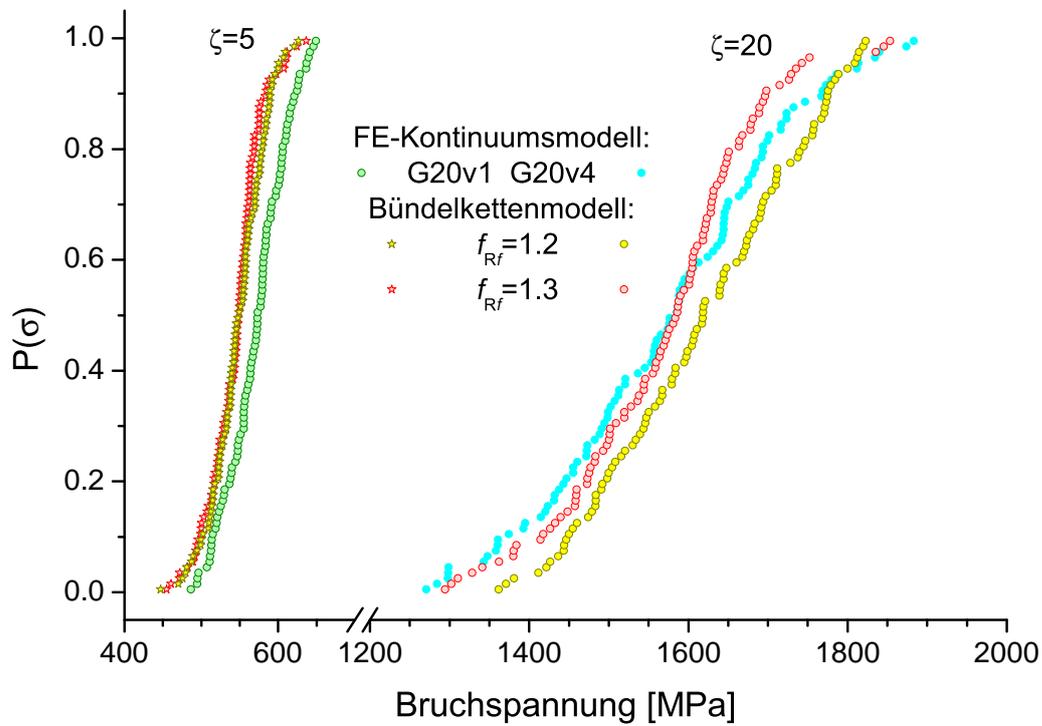


Abbildung 10.76: Verteilung der Bruchschädigungen bei FE und BK bei 2 Verteilungsbreiten (vgl. Tabelle 7.1). (S. 124)

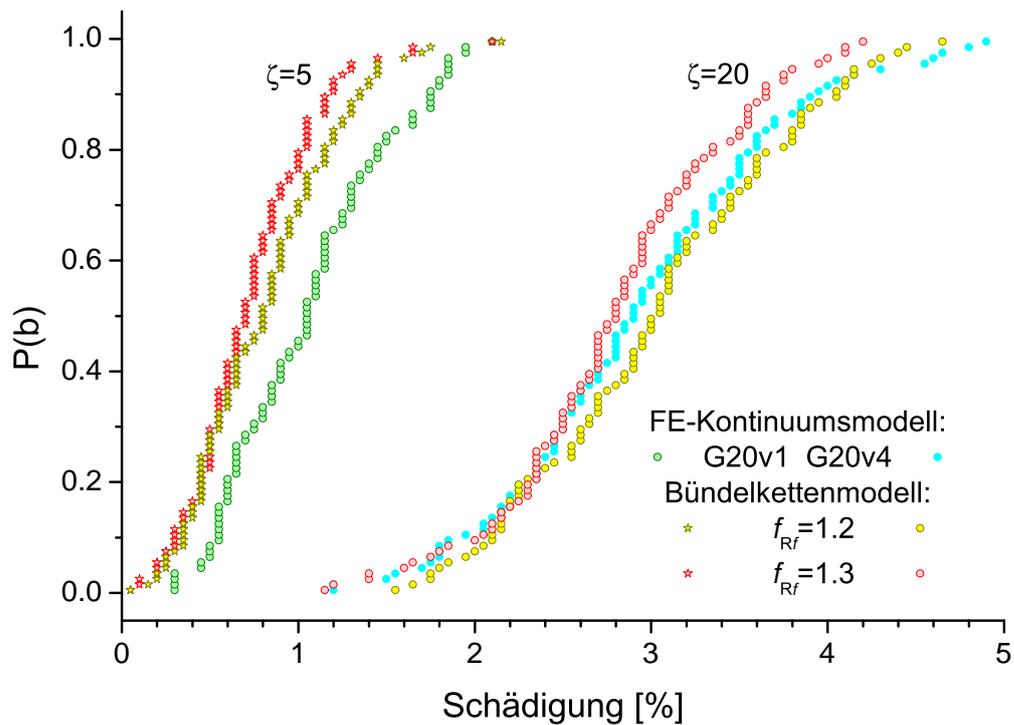


Abbildung 10.77: Bruchspannungsverteilung taillierter Proben. Die experimentell ermittelten Bruchspannungen entstammen Tabelle 2.2; die unskalierten Verteilungen der mit dem FE-Modell ermittelten Bruchspannungen sind identisch mit denen aus Abbildung 10.56 Diese sind dann mittels Gl. (4.25) auf eine Verteilung der Größe $N \times M = 50\,000$ skaliert. (S. 126)

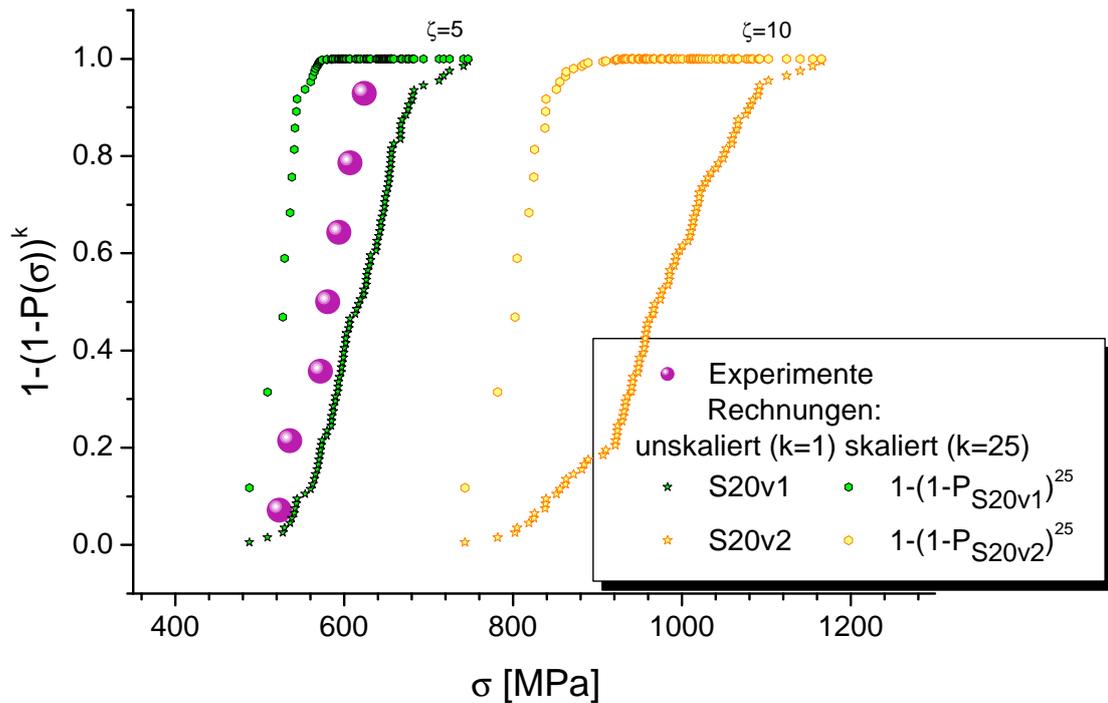
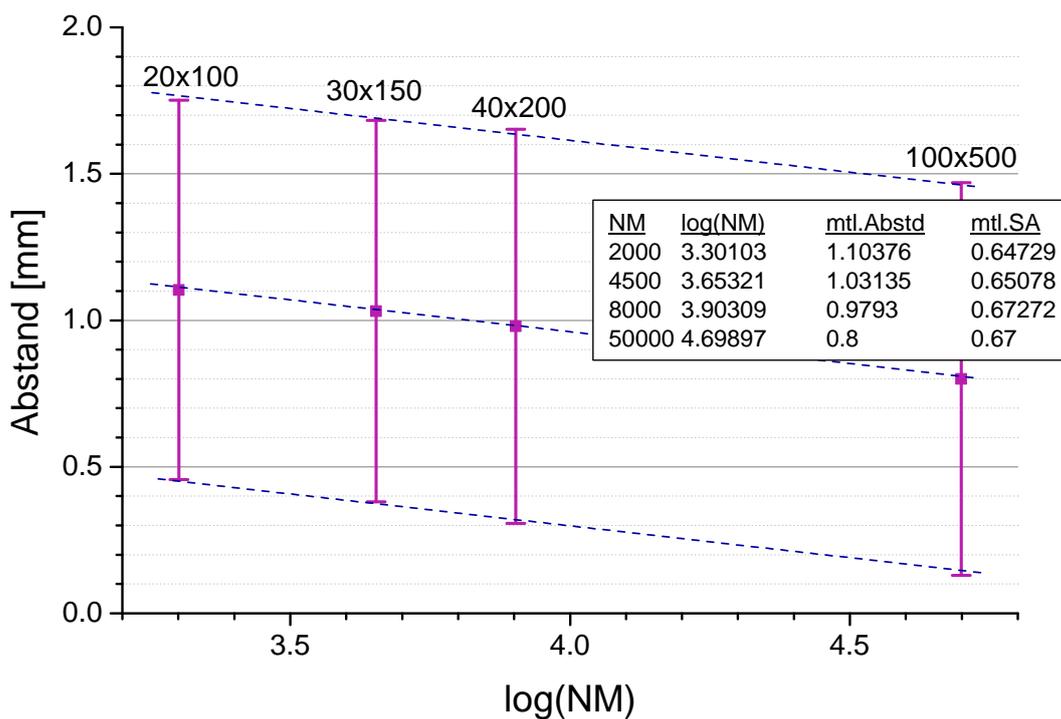


Abbildung 10.78: Skalierung des mittleren Abstandes von der Bruchkante des Rißdichtenschwerpunkts der Modellproben auf den Abstand bei Proben der erforderlichen Größe $NM = 50\,000$. (S. 127)



Literaturverzeichnis

- [1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, ninth edition, 1972.
- [2] Paul Acker. *Concrete: Large-scale heterogeneities and size effects*, chapter 2, Experimental evidence for various materials, pages 52–58. In Herrmann and Roux [44], 1990.
- [3] Ahmed Al-Ostaz and Iwona Jasiuk. Crack initiation and propagation in materials with randomly distributed holes. *Engineering Fracture Mechanics*, 58(5–6):395–420, 1997.
- [4] Ch. Alfes. Relationship between the microstructure and fracture mechanics parameters of sandstone. In van Mier et al. [76], pages 73–82.
- [5] K. Alzebdeh, A. Al-Ostaz, I. Jasiuk, and M. Ostoja-Starzewski. Fracture of random matrix-inclusion composites: Scale effects and statistics. *International Journal of Solids and Structures*, 35(19):2537–2566, 1998. In Charles Steele, editor, *Micromechanics of Random Media II*,.
- [6] A. Arslan, R. Ince, B. L. Karihaloo, and F. ASCE. Improved lattice model for concrete fracture. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1):57–65, Jan. 2002.
- [7] Didier Baptiste. *Failure mechanisms of composite materials*, chapter 2, Experimental evidence for various materials, pages 46–51. In Herrmann and Roux [44], 1990.
- [8] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. in Appl. Mechanics*, 7:55–129, 1962.
- [9] S. C. Baxter, M. I. Hossain, and L. L. Graham. Micromechanics based random material property fields for particulate reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 38:9209–9220, 2001.
- [10] Z. P. Bažant. Size effects on fracture and localizations: Aperçu of recent advances and their extensions to simultaneous fatigue and rate-sensitivity. In van Mier et al. [76], pages 417–429.
- [11] Z. P. Bažant, Z. Bittnar, M. Jirásek, and J. Mazars, editors. *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, London, Sept. 1994. E & FN Spon (Chapman & Hall).
- [12] F. M. Beremin. A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. *Metallurgical Transactions*, 14A:2277–2287, nov. 1983.
- [13] J. E. Bolander Jr. and S. Saito. Fracture analysis using spring networks with random geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 61:569–591, 1998.

- [14] D. Breyse. Understanding some aspects of damage development using hierarchic lattices. In van Mier et al. [76], pages 241–250.
- [15] D. Breyse and P. Renaudin. On the influence of local disorder on size-effect. In Carpinteri [16], pages 187–199.
- [16] Alberto Carpinteri, editor. *Size-Scale Effects in the Failure Mechanisms of Materials and Structures*, London, Oct. 1994. E & FN Spon (Chapman & Hall).
- [17] Jean-Louis Chermant. *Rupture and deformation of ceramics*, chapter 2, Experimental evidence for various materials, pages 33–45. In Herrmann and Roux [44], 1990.
- [18] W. A. Curtin. Size scaling of strength in heterogeneous materials. *Physical Review Letters*, 80(7):1445–1448, February 1998.
- [19] H. E. Daniels. The statistical theory of strength of bundles of threads. *Proc. Royal Soc. (London)*, 183A:405–435, may 1944.
- [20] R. de Borst and J. Carmeliet. Stochastic approaches for damage evolution in local and non-local continua. In Carpinteri [16], pages 243–257.
- [21] R. de Borst, J. Carmeliet, J. Pamin, and L. J. Sluys. New horizons in computer analysis of damage and fracture in quasi-brittle materials. In Bažant et al. [11], pages 359–372.
- [22] René de Borst. Computational materials science. lecture notes, European workshop on funding of material modelling, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Deutschland, March 2002.
- [23] René de Borst. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:95–112, 2002.
- [24] Arnauld Delaplace, Gilles Pijaudier-Cabot, and Stephane Roux. Progressive damage in discrete models and consequences on continuum modelling. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(1):99–136, 1996.
- [25] drand48(3C), C Library Function. manual page SunOS 5.6, Jan 1993.
- [26] D. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8:100–104, 1960.
- [27] M. Elices, G. V. Guinea, J. Gómez, and J. Planas. The cohesive zone model. advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:137–163, 2002.
- [28] G. Engeln-Müllges and F. Reutter. *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-77-Programmen*. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 5. edition, 1986.
- [29] Benjamin Epstein. Statistical aspects of fracture problems. *Journal of Applied Physics*, 19:140–147, feb 1948.
- [30] R. Gerling. private Mitteilung.
- [31] M. Grah, K. Alzebdeh, P. Y. Sheng, M. D. Vaudin, K. J. Bowman, and M. Ostoj-Starzewski. Brittle intergranular failure in 2D microstructures: Experiments and computer simulations. *acta mater.*, 44(10):4003–4018, 1996.

- [32] A. A. Griffith. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A(221):163–198, 1920.
- [33] G. Grosche, V. Ziegler, and D. Ziegler, editors. *Ergänzende Kapitel zu Bronstein-Semendjajew Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, Vierte edition, 1986.
- [34] D. E. Gücer and J. Gurland. Comparison of the statistics of two fracture modes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10:363–373, 1962.
- [35] A. L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. part I. yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99:2–15, 1977.
- [36] Louis A. Hageman and David M. Young. *Applied Iterative Methods*. Academic Press, New York, 1981.
- [37] Alex Hansen and Per C. Hemmer. Criticality in fracture: The burst distribution. *Trends in Stat. Phys.*, 1:213–224, 1994.
- [38] D. G. Harlow and S. L. Phoenix. The chain-of-bundles probability model for the strength of fibrous materials I: Analysis and conjectures. *Journal of Composite Materials*, 12:195–214, April 1978.
- [39] D. G. Harlow and S. L. Phoenix. The chain-of-bundles probability model of strength of fibrous materials II: A numerical study of convergence. *Journal of Composite Materials*, 12:314–334, July 1978.
- [40] D. G. Harlow and S. L. Phoenix. Bounds on the probability of failure of composite materials. *International Journal of Fracture*, 15(4):321–336, August 1979.
- [41] D. G. Harlow and S. L. Phoenix. Probability distributions for the strength of composite materials I: two-level bounds. *International Journal of Fracture*, 17(4):347–372, August 1981.
- [42] Per C. Hemmer and Alex Hansen. The distribution of simultaneous fiber failures in fibre bundles. *ASME Journal of Applied Physics*, 59:909–914, December 1992.
- [43] H. J. Herrmann. Patterns and scaling in fracture. In van Mier et al. [76], pages 195–211.
- [44] H. J. Herrmann and S. Roux, editors. *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*. Random Materials and Processes. North-Holland (Elsevier Science Publishing Comp., Inc.), Amsterdam, 1990.
- [45] Hans J. Herrmann and Stéphane Roux. *Modelization of fracture in disordered systems*, chapter 5, pages 159–188. In Herrmann and Roux [44], 1990.
- [46] Hibbit, Karlsson & Sorensen (HKS), Pawtucket, Ri, USA. *ABAQUS User Manual, ABAQUS 5.8*, 1998.
- [47] A. Hillerborg, M. Modéer, and P-E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Res*, 6(6):773–782, 1976.

- [48] D. Jeulin. Random structure models for homogenization in fracture statistics. In Dominique Jeulin and Martin Ostoja-Starzewski, editors, *Mechanics of Random Multiscale Microstructures*, number 430 in CISM Courses and Lectures, pages 33–91. Springer, Wien, New York, 2001.
- [49] Erland Johnson. Simulations of microcracking in the process region of ceramics with a cell modell. *International Journal of Fracture*, 111:361–380, 2001.
- [50] János Kertész. *Dielectric breakdown and single crack models*, chapter 8, pages 261–290. In Herrmann and Roux [44], 1990.
- [51] M. Kloster, A. Hansen, and P. C. Hemmer. Burst avalanches in solvable models of fibrous materials. *Physical Review E*, 56(3):2615–2625, September 1997.
- [52] D. Krajcinovic. Damage mechanics. *Mechanics of Materials*, 8:117–197, March 1989.
- [53] J. Lemaître. *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Amsterdam, 1992.
- [54] J. Najar and V. Silberschmidt. Continuum damage and failure evolution in inhomogeneous ceramic rods. *Arch. Mech.*, 50:21–40, 1998.
- [55] A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54:525–531, 1987.
- [56] M. Ostoja-Starzewski, P. Y. Sheng, and K. Alzebdeh. Spring network models in elasticity and fracture of composites and polycrystals. *Computational Materials Science*, 7:82–93, 1996.
- [57] M. Pfuff. In Vorbereitung.
- [58] B. Walter Rosen. Tensile failure of fibrous composites. *AIAA Journal*, 2:1985–1991, november 1964.
- [59] P. Rossi and S. Richer. Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach. *Materials and Structures*, 20:334–337, 1987.
- [60] Stéphane Roux. *Continuum and discrete description of elasticity and other rheological behaviour*, chapter 3, pages 87–114. In Herrmann and Roux [44], 1990.
- [61] C. Ruggieri, F. Minami, and M. Toyoda. A statistical approach for fracture of brittle materials based on the chain-of-bundles model. *Journal of Applied Mechanics*, 62:320–328, June 1995.
- [62] I. Scheider and W. Brocks. Simulation of cup-cone fracture using the cohesive model. *engineering Fracture Mechanics*, 70:1943–1961, 2003.
- [63] Ingo Scheider. Kohäsivzonenmodell für die Modellierung von Rißfortschritt in Bauteilen mit elastisch-plastischem Materialverhalten Teil 1: Grundlagen und Implementierung. Technical Report Technical Note GKSS/WMS/00/19, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, August 2000.
- [64] J. Schicker. Calculating large symmetric equation systems using an iterative solver based on conjugate gradient acceleration. Technical Report Technical Note GKSS/WMS/02/06, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Octobre 2002.

- [65] J. Schicker, M. Pfuff, and B. Wiesand-Valk. Modellierung stochastischen Bruchverhaltens mit dem chain-of-bundles-Modell. Technical Report Technical Note GKSS/WMS/02/03, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Mai 2002.
- [66] E. Schlangen and E. J. Garboczi. New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice. *Int. J. Engin. Sci*, 34(10):1131–1144, 1996.
- [67] E. Schlangen and J. G. M. van Mier. Experimental and numerical analysis of micro-mechanisms of fracture of cement-based composites. *Cement & Concrete Composites*, 14:105–118, 1992.
- [68] E. Schlangen and J. G. M. van Mier. Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. *Materials and Structures*, 25:534–542, 1992.
- [69] Karl-Heinz Schwalbe, editor. *ESIS P6-98: Procedure To Measure And Calculate Material Parameters For The Local Approach To Fracture Using Notched Tensile Specimens*. European Structural Integrity Society, March 1998.
- [70] T. Siegmund and W. Brocks. Tensile decohesion by local failure criteria. *Technische Mechanik*, Band 18(Heft 4):261–270, 1998.
- [71] T. Siegmund and W. Brocks. Prediction of the work of separation and implications to modelling. *International Journal of Fracture*, 99:97–116, 1999.
- [72] Vadim V. Silberschmidt and Jerzy Najjar. Computational modelling of the size effect of damage inhomogeneity in ceramics. *Computational Material Sciences*, 13:160–167, 1998.
- [73] R. L. Smith and S. L. Phoenix. Asymptotic distributions for the failure of fibrous materials under series-parallel structure and equal load sharing. *Journal of Applied Mechanics*, 48:75–82, March 1981.
- [74] F. Tzschichholz, H. J. Herrmann, H. E. Roman, and M. Pfuff. Beam models for hydraulic fracturing. *Physical Review B*, 49:7056–7059, 1994.
- [75] I. C. van den Born and A. Santen. Mechanical strength and microstructure of highly porous ceramic: Silica extrudates. In van Mier et al. [76], pages 231–240.
- [76] J. G. M. van Mier, J. G. Rots, and A. Bakker, editors. *Microscopic Material Studies and Material Engineering*, volume one of *Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics*, Noordwijk, The Netherlands, June 1991. International RILEM/ESIS Conference.
- [77] J. G. M. van Mier, A. Vervuurt, and E. Schlangen. Boundary and size effects in uniaxial tensile tests: A numerical and experimental study. In Bažant et al. [11], pages 289–302.
- [78] Jan van Mier. Experiments and simulations for materials science of concrete. lecture notes, European workshop on funding of material modelling, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, Deutschland, March 2002.
- [79] R. A. Vonk, H. S. Rutten, J. G. M. van Mier, and H. J. Fijneman. Micromechanical simulation of concrete softening. In van Mier et al. [76], pages 129–138.
- [80] W. Weibull. The phenomenon of rupture in solids. handlingar Nr. 153, Ingeniörsvetenskapsakademiens, Stockholm, 1939.

- [81] W. Weibull. A statistical theory of the strength of materials. handlingar Nr. 151, Ingeniörsvetenskapsakademiens, Stockholm, 1939.
- [82] B. Wiesand-Valk. 2 Ordner Versuchsunterlagen incl. Disketten mit Meßdaten, 2000.
- [83] B. Wiesand-Valk. *Mikrorißbildung und makroskopisches Versagen in intermetallischen Titanaluminiden*. PhD thesis, TU Hamburg-Harburg, 2000.
- [84] B. U. Wittkowsky. *Untersuchungen zum Sprödbruchverhalten intermetallischer Ti-Al-Si-Nb-Legierungen*. PhD thesis, TU Hamburg-Harburg, 1995. GKSS 95/E/14, Geesthacht.
- [85] B. U. Wittkowsky. Untersuchung der Verformungs- und Versagensvorgänge in einer ($\alpha_2+\gamma$)-Ti-Al-Legierung in Abhängigkeit von der Mikrostruktur. Technical Report Technical Note GKSS/WMA/96/16, GKSS-Forschungszentrum, Geesthacht, 1996.
- [86] Steven Wolfram. *The Mathematica Book*. Wolfram Media/Cambridge University Press, Cambridge, 4th edition, 1999.
- [87] C. Zweben. Tensile failure of fiber composites. *AIAA Journal*, 6(12):2325–2331, december 1968.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Durch die finanzielle Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des SFB 371, „Mikromechanik mehrphasiger Werkstoffe“, wurden die dieser Arbeit zugrundeliegenden Untersuchungen erst möglich.

Besonderer Dank gebührt Herrn Dr. M. Pfuff für die Betreuung der Arbeit und seine unermüdlige Bereitschaft, jederzeit anregende und zielgerichtete Diskussionen zu führen. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. W. Brocks für die Betreuung und Hilfe bei mikromechanischen Fragestellungen, kritische und damit verständnisklärende Nachfragen und die Erstbegutachtung dieser Arbeit. Außerdem gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. H. Föll für die zweite Begutachtung und die damit verbundene Mühe, sich in meine Betrachtungsweise einzuarbeiten.

Bedanken möchte ich mich weiterhin bei der GKSS, die die Rechnerkapazität und die Arbeitsumgebung zur Verfügung stellte, den Kollegen des Instituts für Werkstoffforschung für die gute Arbeitsatmosphäre und ihre konstruktiven Fragen. Besonders erwähnen möchte ich darüberhinaus Herrn Raksts vom Rechenzentrum der GKSS für seine bereitwillige vielfache Unterstützung bei der Bewältigung von Problemen im Zusammenhang mit der Umsetzung der Arbeit wie z. B. Druckerproblemen, Formatierungsfragen, etc.

Geesthacht, im Mai 2005